Ensayos de semántica y filosofía de la lógica

Gottlob Frege

Edición, introducción, traducción y notas de
Luis M. Valdés Villanueva



ENSAYOS DE SEMÁNTICA Y FILOSOFÍA DE LA LÓGICA

GOTTLOB FREGE

ENSAYOS DE SEMÁNTICA Y FILOSOFÍA DE LA LÓGICA

Edición, introducción, traducción y notas de
LUIS M. VALDÉS VILLANUEVA



Diseño de cubierta:
Joaquín Gallego

Impresión de cubierta:
Gráficas Molina

Juan Ignacio Luca de Tena, 15 - 28027 Madrid
ISBN: 84-309-3169-4
Depósito Legal: M-17085-1998

Printed in Spain. Impreso en España por Vía Gráfica, S.A.
c/ Monza, 6, Pol. Ind. Uranga. 28942 Fuenlabrada (Madrid)

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

LUIS M. VALDÉS VILLANUEVA

Gottlob Frege nació en Wismar, una localidad de la costa báltica alemana en 1848. En 1868 ingresó como estudiante en la Universidad de Jena en la que cursó cuatro semestres antes de pasar, en 1871, a la Universidad de Gotinga, donde presentó su tesis doctoral («Sobre una representación geométrica de las figuras imaginarias en el plano»). En 1874 solicitó un puesto de *Privatdozent* en la Universidad de Jena, con ocasión de lo cual presentó el escrito titulado «Métodos de cálculo basados en una extensión del concepto de magnitud». En 1879 fue nombrado *aussenordentlicher Professor*, también en la Universidad de Jena, en la que enseñaría hasta 1917. Aunque a raíz de la publicación del volumen I de *Grundgesetze* (1893), se le nombró, con carácter honorario, *ordentlicher Professor*, jamas se le concedió una cátedra *sensu stricto*. Al jubilarse decidió abandonar Jena para instalarse en su región de origen, Mecklemburgo, donde falleció en 1925.

LA CARRERA INTELECTUAL DE GOTTLOB FREGE

De acuerdo con Michael Dummett[1], la carrera intelectual de Gottlob Frege (1848-1925) puede dividirse en cinco períodos bien delimitados. El primero de ellos comprende la publicación de *Begriffsschrift*[2] (1879) y una serie de obras menores relacionadas. El objetivo de Frege en esta etapa era diseñar un simbolismo unifor-

[1] Ver M. Dummett, «Frege's Philosohy», en M. Dummett (ed.), *Truth and Other Enigmas*, Duckworth, Londres, 1978, p. 92.

[2] *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelnsprache des reinen Denkens*, L. Nerbert, Halle, 1879. Existe una versión castellana en UNAM, México, 1973.

me que permitiera verificar la corrección de una demostración matemática inspeccionando solamente sus características estructurales, sin tener que apelar a nada que no estuviese ya explícitamente enunciado. Como ha señalado Hans Sluga[3], existieron razones históricas para esta preocupación de Frege por el rigor y la precisión en matemáticas: durante el siglo XIX las matemáticas se empezaron a aplicar cada vez más a los problemas científicos y tecnológicos[4], y de ahí surgió en gran parte la preocupación por dotarlas de unos fundamentos satisfactorios. El propio Frege reconoce al final de su vida que su primera preocupación fue la necesidad de fundamentar las matemáticas sobre bases firmes: «Empecé con las matemáticas» —afirma él—. «Me parecía que había una muy urgente necesidad de mejores fundamentos en esa ciencia [...]. La imperfección lógica del lenguaje era un obstáculo para tales investigaciones. Busqué un remedio en mi *Begriffsschrift*. Entonces pasé de las matemáticas a la lógica»[5]

El segundo período abarca hasta la publicación en 1884 de *Die Grundlagen der Arithmetik*[6]. Una vez diseñado el sistema de *Begriffsschrift* la primera tarea a realizar habría de consistir en la formalización efectiva de las teorías matemáticas, y Frege se puso manos a la obra empezando por la aritmética. Pero al tratar de realizar su empresa Frege atisbó que quizás era posible dar cuenta de la aritmética sin necesidad de utilizar nociones primitivas exclusivas de esta disciplina, lo que constituyó el ideal logicista. Justamente para proporcionar una explicación preliminar de la aritmética, Frege escribió *Grundlagen*, obra que, a decir de Dummett, marca la transformación de Frege de matemático en filósofo: es en este libro donde se comienzan a utilizar sistemáticamente una serie de distinciones pertenecientes a la provincia de la filosofía

---

3 Hans Sluga, *Gottlob Frege*, Routledge and Kegan Paul, Londres, 1980, p. 42.

4 Ernst Abbe, uno de los protectores de Frege en Jena, alcanzó gran fama por su trabajo en óptica matemática, una ocupación que cubría, a la vez, intereses teóricos y prácticos.

5 G. Frege, *Nachgelassene Schriften*, editato por H. Hermes *et alii*, Hamburgo, 1969, p. 273.

6 *Die Grundlagen der Arithmetik, eine logisch mathematische Untersuchung über den Begriff der Zhal*, W. Koebner, Breslau, 1884. Existe traducción castellana en Laia, Barcelona, 1972.

del lenguaje con el objeto de elucidar ciertos problemas de la lógica y la aritmética.

El tercer período llega hasta la publicación en 1903 del volumen II de *Die Grundgesetze der Arithmetik*[7]. Es en esta época en la que Frege introduce sus más famosas ideas y distinciones en filosofía de la lógica y del lenguaje. Entre 1891 y 1892 publica «Función y concepto», «Sobre sentido y referencia» y «Sobre concepto y objeto», obras que constituyen aportaciones capitales a la filosofía contemporánea. En *Grundgesetze*, Frege intenta llevar a cabo de manera detallada el programa expuesto en *Grundlagen*, utilizando, con algunas modificaciones, un sistema similar al de *Begriffsschrift*. La diferencia más importante viene dada por la introducción de clases —que no aparecían en *Begriffsschrift*— y para las que Frege tuvo que diseñar una notación peculiar y un axioma que las gobernase: el famoso Axioma V que tantos problemas habría de causarle.

El cuarto período, extremadamente corto, abarcaría desde la publicación del volumen II de *Grundgesetze* (1903) hasta el año siguiente en que Frege cae en una profunda depresión. La fría acogida dispensada por los lógicos y los matemáticos tanto a *Grundlagen* como al volumen I de *Grundgesetze*, parece ser la razón por la que Frege demoró la publicación del volumen II de esta última obra durante diez años. Este segundo volumen completa la derivación formal de la aritmética y se adentra en los fundamentos del análisis. Al igual que sucedía en el caso de *Grundlagen*, el volumen va precedido de un estudio crítico —ciertamente no tan lúcido como en el caso anterior— de las teorías rivales. En realidad, Frege, intentaba publicar un tercer volumen de *Grundgesetze* (la obra se acaba antes de la definición de número real) pero cuando estaba en pruebas el volumen II recibió la fatídica carta de Russell en la que se le comunicaba el hallazgo de la célebre paradoja. A pesar de ello, tuvo suficientes agallas para sobreponerse e introducir un apéndice en el que modificaba el Axioma V con la esperanza de evitar la paradoja. Algunos años más tarde, ciertamente después de la muerte de Frege, Stanislaw Lésnieski mostró que el axioma modificado llevaba también a contradicción.

El quinto y último período abarca desde 1904 hasta la muerte

[7] *Grundgesetze der Arithmetik*, H. Phole, Jena, vol. I, 1893, y vol. II, 1903. Hay una reimpresión de ambos volúmenes en Georg Olms, Hildesheim, 1962.

de Frege en 1925. Es éste un período en el que Frege estuvo bajo los efectos de una fuerte depresión. Entre 1904 y 1917 no publicó nada de interés especial: sólo un puñado de artículos polémicos. Pero entre 1918 y 1923 pareció recobrar la compostura y comenzó a escribir por sexta vez un tratado de filosofía de la lógica que estaba destinado a llevar como título *Logische Untersuchungen* (*Investigaciones lógicas*) y del que formarían parte los artículos «El pensamiento», «La negación», «Composición de pensamientos» y «Generalidad lógica»[8]. Después de 1923 no publicó artículo alguno, aunque sí puso por escrito sus opiniones, completamente negativas ahora, sobre el proyecto de fundamentar la matemática en la lógica.

Al jubilarse como profesor de la Universidad de Jena en 1918, Frege decidió retirarse a Bad Kleinen, en el norte de Alemania, muy cerca de su ciudad natal, Wismar, donde falleció el 26 de julio de 1925. En su testamento, dejaba en herencia a su hijo adoptivo, Alfred, una importante cantidad de artículos sobre lógica y fundamentos de la matemática, así como cartas y otros escritos. En una nota añadida a su testamento, que lleva fecha de 1.º de enero de 1925, Frege escribió lo siguiente:

> Querido Alfred:
> No te deshagas de lo que he escrito. Aunque no sea todo oro, hay ciertamente oro en ello. Creo que hay cosas aquí que algún día se apreciarán mucho más de lo que se aprecian hoy. Procura que nada se pierda.
>
> Tu padre que te quiere.
>
> Lo que te lego con esto es una parte de mí mismo.

El legado de Frege permaneció en manos de su hijo hasta 1935 en que Alfred Frege entregó gran parte de él al profesor Heinrich Scholz, de la Universidad de Münster con el objeto de proceder a su publicación. Durante la Segunda Guerra Mundial, los originales estuvieron depositados en la biblioteca de la Universidad de Münster, de donde desaparecieron tras el bombardeo de los aliados del 25 de marzo de 1945. Afortunadamente, se habían hecho copias de lo más importante y, tras varias vicisitudes, parte de los escritos póstumos de Frege vieron la luz en 1969 editados por un

---

[8] Ver pp. 196-281 de este volumen.

grupo de estudiosos liderados por Hans Hermes, el sucesor de Scholz en Münster. Un segundo volumen que contiene su correspondencia apareció en 1976[9]. Entre los escritos póstumos se encontraba un diario que Frege escribió entre el 10 de marzo y el 9 de mayo de 1924 (publicado solamente en 1994[10]), donde queda una vez más de manifiesto que ninguna metodología filosófica puede servir de vacuna contra la adopción de posturas sociopolíticas moralmente repugnantes.

La acogida que la obra de Frege recibió entre sus contemporáneos fue ciertamente bastante pobre. No sólo sucedió esto entre los matemáticos —con alguno de los cuales sostuvo Frege importantes polémicas— sino también entre los filósofos. Así, por ejemplo, según cuenta Peter Geach[11], Wittgenstein contemplaba bastante desfavorablemente uno de los ensayos más importantes de Frege: «El pensamiento». Pero tampoco es del todo justo afirmar que estuviera completamente aislado: mantuvo abundante correspondencia con la mayor parte de los filósofos y matemáticos de su época (perdida en su gran parte a causa de los bombardeos de la Segunda Guerra Mundial): Hilbert, Husserl, Russell y Wittgenstein. A pesar de sus reticencias, el propio Wittgenstein le confesó a Geach pocos días antes de morir: «¡Cómo me gustaría haber podido escribir como Frege!»

LÓGICA Y GRAMÁTICA

En mayo de 1874 —fecha en la que fue nombrado *Privatdozent* en la Universidad de Jena— Frege empezó a trabajar en la *Conceptografía*, la obra que iba a marcar de manera definitiva su carrera filosófica y que iba a sentar las bases de la nueva lógica.

---

[9] *Nachgelassene Schriften*, editados por H. Hermes, F. Kambartel y F. Kaulbach, Felix Meiner, Hamburgo, 1969; *Wissenschaftlicher Briefwechsel*, edición de G. Gabriel, H. Hermes, F. Kambartel, C. Thiel y A. Veraart, Felix Meiner, Hamburgo, 1969.

[10] *Tagebuch* von Gottlob Frege, *Deutsche Zeitschrift für Philosohie*, 42 (1994), 6, pp. 1067-1098, editado con notas por Gottfired Gabriel y Wolfang Kienzler. Existe una traducción castellana publicada en *Teorema*, vol. XVI/III, 1997, pp. 5-45.

[11] En G. Frege, *Logical Investigations*, editado con un prólogo por P. T. Geach, Blackwell, Oxford, 1977.

El propósito de Frege al diseñar un nuevo lenguaje simbólico no era ciertamente hacer avanzar a la lógica tradicional, sino más bien proporcionar a la aritmética unos fundamentos seguros. Frege consideraba además que esos fundamentos eran esencialmente lógicos, de modo que se impuso la tarea de derivar la totalidad de la aritmética a partir de la lógica. Ahora bien, al ponerse manos a la obra, Frege llevó a cabo, sin proponérselo, la transformación más radical que la lógica ha sufrido desde la época de Aristóteles.

Frege partía de la convicción de que el lenguaje ordinario no ofrecía garantía alguna de seguridad: las ambigüedades y vaguedades de que estaba aquejado enmascaraban lo que él denominaba *begriffliche Inhalt* (contenido conceptual) de las oraciones, aquello que servía de soporte a las inferencias. No creo que esto quiera decir que Frege se alinease con la corriente de pensamiento —que tiene su inicio quizás en Ramon Llull y que incluye representantes tan cualificados como Leibniz[12]— cuyo objetivo es el de construir lenguajes lógicamente perfectos que sirviesen como instrumentos de solución de problemas de la más variada índole. La concepción de Frege es muy otra: pensaba que su lenguaje simbólico y el ordinario mantenían una relación semejante a la que existe entre el microscopio y el ojo. El ojo es mucho más versátil que el microscopio: se aplica a infinidad de objetos y en infinidad de situaciones. Pero el microscopio es útil sólo en situaciones donde necesitamos un detalle particular de un objeto particular (y esto quiere decir que en las situaciones ordinarias es perfectamente inútil). El lenguaje de la conceptografía es el instrumento con el que examinamos el soporte de las inferencias, lo que nos permite desnudar las expresiones lingüísticas dejando sólo los contenidos conceptuales.

Al intentar explicar cómo el lenguaje ordinario enmascaraba tales contenidos, Frege utilizó un arma que resultó ser muy fructífera: se trata de la idea de que no debe darse por supuesto que las distinciones gramaticales son siempre pertinentes desde el punto de vista lógico. De acuerdo con esto, el lenguaje ordinario nos despistaría por no tomar en cuenta que muchas veces gramática y

---

[12] Cfr. A. Kenny, *Frege, An Introduction to the founder of modern analytical philosophy*, Penguin, Londres, 1995, p. 13. Existe traducción castellana en Cátedra, Madrid, 1997.

lógica no van de la mano. Veamos algunos de los importantes rendimientos que se extraen de esta idea en *Begriffschrift*.

Si, por ejemplo, consideramos las dos oraciones siguientes:

(1) Los griegos derrotaron a los persas

y

(2) Los persas fueron derrotados por los griegos,

diremos sin duda que, desde el punto de vista gramatical, (1) y (2) tienen sujetos y predicados diferentes. En (1) el sujeto son «los griegos» y el predicado «derrotaron a los persas», mientras que en (2) el sujeto es «los persas» y el predicado «fueron derrotados por los griegos». Desde luego (1) y (2) se diferencian también estilísticamente (en su *iluminación* o *coloración*, como decía Frege), pero son *equipolentes*, esto es: cualquier cosa que se siga lógicamente de (1) se sigue también de (2), y viceversa. Por consiguiente, (1) y (2) no difieren en contenido conceptual y son idénticas desde el punto de vista lógico.

En *Begriffschrift* las nociones de sujeto y predicado fueron reemplazadas por las de *función* y *argumento*. Si substituimos en (1) la expresión «los persas» por la expresión «los partos» obtenemos

(3) Los griegos derrotaron a los partos,

cuyo contenido conceptual es diferente del de (1). Ahora bien, (1) y (3) podrían descomponerse en una parte *constante*, «los griegos derrotaron a...»[13], y una parte *variable*, «los persas» o «los partos». En *Begriffschrift* la parte constante se denomina *función* y la parte variable *argumento*. A su vez (1) es el *valor* de la función «los griegos derrotaron a...», para el argumento «los persas», y (2) es el valor de esa misma función para el argumento «los partos». Pero también (1) y (2) pueden analizarse en términos de argumen-

[13] En *Begriffschrift* Frege no distingue claramente todavía entre la expresión de una función y la función misma, así como entre un nombre y lo que nombra. En la mayor parte de los casos parece concebir funciones y argumentos como entidades lingüísticas y ésta es la razón por la que van entre comillas.

to y función de manera distinta, sin que ello incida para nada en el contenido conceptual respectivo. Así (1) es el valor de la función «... derrotaron a los persas» para el argumento «los griegos» y (3) es a su vez el valor de la función «... derrotaron a los partos» para el mismo argumento.

Pero (1) es también el valor de la función «... derrotaron a....» para los argumentos «los griegos» y «los persas» (precisamente en este orden), y (3) es el valor de la misma función para los argumentos «los griegos» y «los partos» (precisamente en este orden). Vemos entonces que hay funciones que se completan con un sólo argumento (propiedades) y otras que se completan con más de uno (relaciones). Podemos observar aquí también cómo la gramática nos despista al equiparar propiedades y relaciones, una distinción que resulta indispensable para dar cuenta de algunas inferencias.

La importancia de separar los análisis gramaticales de los lógicos (y también la utilidad de la distinción entre función y argumento) resulta meridianamente clara en la teoría de la cuantificación. Considérese la oración siguiente:

(4) Aristóteles es filósofo;

si la analizamos en términos del argumento «Aristóteles» y la función «... es filósofo», podemos decir que para el argumento «Aristóteles» esta función resulta ser verdadera ¿Cómo podríamos expresar el que esta función resulta ser verdadera para todo argumento? Frege diseñó una notación para señalar esto último que, en su versión contemporánea reza así:

(5) $\forall x$(x es filósofo).

(5) dice algo así como lo siguiente: sea cual sea el argumento que contemplemos, la función «... es filósofo» resulta ser verdadera. Lo que en castellano ordinario equivaldría (restringiendo el rango de los argumentos a los seres humanos) a «Todo ser humano es filósofo». Esta oración es desde el punto de vista gramatical de sujeto-predicado, pero desde el punto de vista lógico lo que tenemos es un cuantificador, una función y dos variables. Del mismo modo si

(6) Aristóteles es discípulo de Platón

coincide con el valor de la función «... es discípulo de ...» para los valores «Aristóteles» y «Platón», su generalización sería:

(7) $\forall x \forall y$ (x es discípulo de y).

(7) se leería entonces más o menos así: para cualesquiera dos argumentos que reemplacen a x e y la función «... es discípulo de...» es hecha verdadera. O, si limitamos nuevamente el rango de los argumentos a los seres humanos, «Todo ser humano es discípulo de todo ser humano».

Obsérvese ahora cómo usa Frege la distinción entre función y argumento en el caso de la cuantificación. (5) es, como hemos visto, una generalización de (4), analizada como valor de la función «... es filósofo» para el argumento «Aristóteles». Pero a su vez (5) es el valor de la función «todo ser humano...» [$(\forall x)(x...)$] para el argumento «... es filósofo». Del mismo modo, (7) es el valor de la función «cualesquiera dos seres humanos ...» [$(\forall x \forall y)$ (x ...y)] para el argumento «... es discípulo de...». ¿Cómo puede suceder que lo que en un momento son funciones se conviertan a su vez en argumentos? Bien, Frege mantiene que hay una jerarquía de funciones. Del mismo modo que (4) o (6) son el resultado de combinar función y argumento, hay un modo en el que (5) y (7) son también el resultado de combinar una función y un argumento. «... es filósofo» es ciertamente una expresión incompleta que puede completarse mediante un argumento como sucede en (4). Tenemos entonces una función de primer nivel. Pero esa misma expresión puede también completarse si se convierte ella misma en argumento de una función de segundo nivel. Y esto es lo que sucede en (5). [Razonamiento similar se aplica a (6) y (7).] Frege marca esta diferencia de niveles diciendo que, mientras que las expresiones «Aristóteles» o «Platón» presentan por sí mismas una idea independiente, «todo ser humano» o «cualesquiera dos seres humanos», sólo adquieren sentido en el contexto de una oración. Vemos ahora por qué la distinción entre función y argumento resulta importante. El modo en que distingamos entre argumento y función en (4) o (6) es irrelevante para su contenido conceptual, pero no lo es en (5) y (7), donde lo único que podemos tomar como argumento son las funciones «es filósofo» y «es discípulo de».

Esta notación, que permite expresar la generalidad de un modo uniforme[14] y que es una de las claves del desarrollo de la lógica simbólica, no se hubiera podido establecer si Frege no se hubiese liberado de la idea de que las estructuras lógicas y las gramaticales iban a la par. Esto le permitió ofrecer por vez primera un cálculo deductivo para la lógica de primer y segundo orden en el sentido en que actualmente entendemos estos términos, con tal éxito que algunos de sus aspectos sólo serían superados cincuenta años más tarde.

LOS FUNDAMENTOS DE LA ARITMÉTICA

Hemos dicho que el desarrollo de la nueva lógica fue, por así decirlo, un subproducto del afán de Frege por dotar a la aritmética de unos fundamentos seguros. Ahora bien ¿por qué pensó Frege que tenía que dotar a la aritmética de tales fundamentos? M. Beaney[15] ha señalado que la respuesta se encuentra en la preocupación por el rigor en el análisis matemático surgida en el siglo XIX. La introducción por Cauchy del concepto de límite y la insistencia de Weierstrass en fundamentar el análisis en la teoría de números fueron sólo los primeros pasos. Tanto Cantor como Dedekind y el propio Weierstrass, dieron cuenta de los números reales en términos de series convergentes de números racionales y, puesto que los números racionales pueden definirse fácilmente en términos de números naturales, parecía que el círculo se cerraba. Pero los números naturales se consideraban como primitivos y Frege se impuso la tarea de completar el proceso reductivo: definir los números naturales en términos puramente lógicos.

Amargamente para Frege, la publicación de *Begriffschrift* pasó bastante desapercibida —y recibió incluso duras críticas— tanto entre los matemáticos como entre los filósofos. Es probable que fuese esta circunstancia la que llevó a Frege a la convicción de que era necesario hacer una exposición informal de su posición

---

[14] Mediante este análisis, Frege solucionaba de golpe algunos problemas que restringían de manera muy severa la capacidad expresiva de la lógica tradicional. Piénsese, por ejemplo, en su incapacidad para tratar de un modo adecuado de las relaciones, o la ocurrencia de la cuantificación en los predicados gramaticales.

[15] M. Beaney (ed.), *The Frege Reader*, Blackwell, Oxford, 1997, p. 4.

antes de embarcarse en pruebas rigurosas utilizando el lenguaje de la conceptografía. El resultado de este esfuerzo fue la publicación en 1884 de *Die Grundlagen der Arithmetik*, la obra que, en opinión de Dummett, hace que Frege se transforme definitivamente de matemático en filósofo.

Como sucedió en el caso de *Begriffsschrift*, Frege se dio cuenta de que para definir los números naturales en términos puramente lógicos era necesario antes librarse de las malas concepciones que infectaban el pensamiento matemático y filosófico de su tiempo. En el prólogo a *Grundlagen*, después de constatar hasta qué punto es ilusoria la confianza de los matemáticos de su época en que nociones como la de «número» o «cálculo» estaban perfectamente delimitadas y carecían de dificultad alguna, Frege proclama que su investigación fundamental sobre el concepto de número tiene que ser *también* filosófica: incluso «más filosófica de lo que a muchos matemáticos puede parecerles adecuado». Existía en este punto un escollo importante. En época de Frege, la psicología gozaba de gran prestigio entre los filósofos y de hecho infectaba muchas de sus disciplinas, incluida la lógica[16]. Afirmaciones como que, por ejemplo, «las imágenes de los números son motóricas, dependientes de sensaciones musculares», no eran en absoluto una extravagancia. El propio Frege reconoce que es de todo punto comprensible que el matemático rechace tal análisis: simplemente no reconoce en él a los objetos con los que, como matemático, está familiarizado. Y lo mismo sucede con las posiciones de acuerdo con las cuales la aritmética tiene que ver con las representaciones internas formadas a partir de impresiones sensoriales. Ciertamente, puede resultar útil examinar la génesis y evolución de tales representaciones pero, advierte Frege, «que no se figure la psicología que con ello va a poder aportar algo a la fundamenta-

[16] Hans Sluga (en *Frege*, Routledge and Kegan Paul, 1980) ha puesto de manifiesto las raíces de este prestigio de la psicología en la filosofía alemana de la segunda mitad del siglo XIX. El idealismo dejó de ser la corriente filosófica dominante en Alemania a partir de la Revolución de 1830 por dos razones esenciales. De un lado se le consideraba demasiado ligado al autoritarismo prusiano y de otro la *Naturphilosophie* idealista alcanzaba deductivamente conclusiones que chocaban escandalosamente con los resultados de las ciencias experimentales. El resultado de estas circunstancias fue la puesta en cuestión de la filosofía misma y el comienzo de una nueva tradición que pretendía enfocar los problemas más «científicamente». Es en este escenario donde el psicologismo hace su aparición.

ción de la aritmética». Esto no equivale a negar que la psicología puede proporcionar explicaciones causales de cómo surge el pensamiento de que 2 · 2 = 4, pero tal explicación genética no tiene nada que ver con la aritmética que se ocupa de la *verdad* de proposiciones de este tipo y no de *cómo surgen*. Un pensamiento es verdadero independientemente de que alguien lo esté pensando efectivamente: el teorema de Pitágoras no deja de ser verdadero cuando dejo de pensarlo, como el sol no deja de existir cuando cierro los ojos. Y es muy instructivo examinar las condiciones, tanto psicológicas como naturales (por ejemplo, la cantidad de fósforo que contiene nuestro cerebro) que son necesarias para que surja tal pensamiento. Pero pensar que esto aporta algo a la aritmética, lleva a la más absoluta confusión: «parece, afirma Frege, que algunos piensan que los conceptos nacen en el alma individual como las hojas en los árboles, y creen que pueden averiguar su esencia investigando su surgimiento y tratando de explicarlo psicológicamente a partir de la naturaleza del alma humana. Pero esta concepción aboca todo a lo subjetivo y, si se prosigue hasta el fin, suprime la verdad.»

Precisemos un poco cuál es el pensamiento de Frege en este punto. Aunque lo veremos desarrollado más sistemáticamente en escritos posteriores[17], Frege está insistiendo aquí en la distinción entre el mundo de lo subjetivo (sensaciones, imágenes, etc.) de una parte del mundo objetivo que en *Grundlagen* llama «el mundo de los conceptos». La psicología se encarga del estudio del reino de lo subjetivo. Pero al mundo de los conceptos no pertenecen ni las sensaciones ni las imágenes; los conceptos no son una propiedad de algún alma individual y no surgen en un momento determinado ni sufren evolución alguna. Dado que el campo de la matemática tiene que ver con el estudio de los conceptos —que nada tienen que ver con la psicología—, cualquier infección de ésta sólo puede llevar a confusión.

Es necesario, pues, renunciar en este punto a cualquier auxilio de la psicología que, en el mejor de los casos, resulta inútil. Sin embargo, es difícil negar la estrecha conexión entre la matemática y la lógica. En primer lugar, mantiene Frege, cualquier examen de

---

[17] Por ejemplo, en las *Investigaciones lógicas*, particularmente en «El pensamiento».

la corrección de una demostración, ha de basarse, si lo que se busca es una seguridad de tipo general, en las leyes de la lógica. Pero, en segundo lugar, mantiene: una definición no es suficientemente segura cuando, (i) *como asunto de hecho*, no da lugar a *contradicciones* en su empleo y (ii) es *fructífera* en el sentido de que permite establecer conexiones entre cosas aparentemente dispares. Tal seguridad es sólo una ilusión, pues solamente resulta *a posteriori* del hecho de que, al usarla, no hemos obtenido contradicción alguna. Esto, ciertamente, no elimina la posibilidad de que en un uso futuro podamos encontrar una contradicción que invalide la seguridad que le habíamos otorgado. Es por ello por lo que Frege piensa que es necesario retroceder hasta los fundamentos lógicos más generales de un modo mucho más radical del que consideran necesario la mayoría de los matemáticos.

Al final de la introducción de *Grundlagen*, Frege enuncia los tres principios que servirán de guía a su investigación:

> *a*) Hay que separar tajantemente lo psicológico de lo lógico, lo subjetivo de lo objetivo.
> *b*) El significado de las palabras ha de ser buscado en el contexto de toda la proposición, nunca en las palabras aisladas.
> *c*) Hay que tener siempre presente la diferencia entre concepto y objeto[18].

a) es simplemente la exigencia de no tomar las sensaciones o imágenes, que son algo subjetivo, por conceptos u objetos, que son algo objetivo. *b*) es lo que podemos llamar «el principio del contexto» y afirma la primacía de la oración sobre la palabra en el análisis del significado. Este principio es de hecho un aliado esencial en la cruzada antipsicologista de Frege. Si mantenemos la primacía de la palabra en el análisis del significado, nos sentiremos fácilmente tentados a considerar a las sensaciones o a las representaciones internas como significados de palabras para las que no encontramos fácilmente un objeto que les corresponda en el mundo exterior. Esto entra obviamente en conflicto con *a*), pues hace de los significados entidades subjetivas. El tercer principio se probará fundamental en las discusiones posteriores.

---

[18] *Fundamentos de la Aritmética*, p. 20 de la versión castellana por donde cito.

La tesis clave de *Grundlagen*, por lo que respecta al concepto de número, aparece en la parte III. Antes (en la parte I) Frege había defendido la tesis de que las verdades aritméticas son analíticas *a priori*, y que tales verdades «serían a las de la lógica lo que los teoremas son a los axiomas de la geometría»[19]. En parte II, Frege critica la idea de que los números son, o bien propiedades de cosas externas o representaciones. Respecto de lo primero, las apariencias gramaticales pueden engañarnos. En las oraciones «Esta superficie es azul» y «El número de estas barajas es 100» parecen hacerse dos atribuciones: en el primer caso de un color y, en el segundo, de un número. Pero hay diferencias fundamentales. La atribución de color a una superficie es algo que se hace independientemente de decisiones nuestras. Ser azul tiene que ver con la capacidad que una superficie tiene de reflejar y absorber rayos de luz. Pero en el caso de las barajas, si nuestra oración se considera como la respuesta a la petición «Determina el número de *esto*», donde «esto» es un conjunto de barajas, la determinación del número exige antes una decisión acerca de si lo que contamos son las barajas individuales, los subconjuntos que son mazos de barajas completas, los subconjuntos de barajas de cada palo,... etc. Esto es: el número no puede ser una propiedad de una cosa externa (como por ejemplo «azul») ya que el número que adscribimos a una cosa depende de *cómo la clasificamos previamente* y esto depende de nuestros propósitos clasificatorios.

Ahora bien, si el número no es una propiedad de las cosas externas, parece que estamos obligados a aceptar que es algo subjetivo. Y, si es algo subjetivo, la clave para determinar en qué consiste, estaría en una investigación de cómo el número surge en nosotros. Pero Frege rechaza el razonamiento de acuerdo con el cual el número es algo subjetivo puesto que depende de una decisión anterior nuestra qué número asignemos a algo:

---

[19] En la época de Frege, tal afirmación era, cuando menos, atrevida. Existía entonces un amplio desprecio hacia los juicios analíticos y hacia la lógica pura como conjunto de verdades estériles ¿Cómo se podía defender la idea de que la aritmética tenía tales fundamentos? Frege piensa que tales argumentos residen en una confusión fundamental. Ciertamente en aritmética y lógica se producen manipulaciones de signos. Pero los signos tienen un contenido al que ellos le prestan un ropaje sensible. Si se puede demostrar que la aritmética, con sus múltiples aplicaciones, tiene fundamentos estrictamente lógicos, se lograría eliminar de paso el mito de la esterilidad de las verdades lógicas.

[...] el número es un objeto de la psicología o un resultado de procesos psíquicos tanto como lo pueda ser, digamos, el mar del Norte. La objetividad del mar del Norte no viene afectada por el hecho de que dependa de nuestro arbitrio qué parte de toda la superficie de agua en la tierra delimitemos y cubramos bajo el nombre de «mar del Norte». Éste no es motivo para querer estudiar este mar por vía psicológica[20].

Frege distingue aquí entre lo objetivo y lo que es perceptible por los sentidos, espacial o actual. Así el eje de la Tierra, el centro de masas del sistema solar, o el color de una superficie son algo objetivo. Sin embargo, los dos primeros no son algo perceptible por los sentidos, lo cual no elimina un ápice de su objetividad. La consideración de los números como algo subjetivo lleva, por otra parte, a absurdos sin cuento. Si el 2, por ejemplo, fuera una imagen, sería solamente mía: no cabría hablar del 2, sino de los millones de doses que existen en virtud de las imágenes del 2 que cada uno de nosotros tiene. Además, con el crecimiento de la especie humana irían creciendo y evolucionando también los doses, ¿y no podría quizás la evolución llegar a hacer que $2 \cdot 2$ fuese igual a 5?

Frege comienza a elaborar su propia concepción de número tomando en cuenta la definición de número como multiplicidad o pluralidad. Inmediatamente observa ciertas deficiencias: tal definición excluye los números 0 y 1; «multiplicidad», «pluralidad» o «conjunto» tienen un uso vacilante: tan pronto se acercan al significado de «montón», «agregado» o «grupo», como se usan con significado parecido al de «número», sólo que de manera más vaga. Además, ¿en qué consisten los miembros de los conjuntos? ¿Son conjuntos de cosas? O, como mantuviera Euclides, ¿son conjuntos que constan de unidades?

Ahora bien, ¿qué es una unidad? Una unidad no es ciertamente un predicado de cosas. Pero, ¿por qué se llaman a las cosas unidades si todas las cosas son unidades o pueden concebirse como tales? ¿No es «unidad» sólo otro nombre para «cosa»? La historia de la filosofía esta recorrida por la concepción de acuerdo con la cual atribuimos *igualdad* (*Gleichheit*) a los objetos que contamos;

---

[20] *Fundamentos de la Aritmética*, p. 52. Frege hizo una recensión muy crítica, a veces de la obra de Husserl, *Philosophie der Arithmetik I* (ver pp. 140-159 de este volumen). Es absolutamente verosímil que la conversión de Husserl al antipsicologismo tenga sus raíces en este escrito que, por otra parte, congeló durante años las relaciones entre los dos filósofos.

parece seguro que las propiedades por las que dos cosas difieren son absolutamente irrelevantes por lo que respecta a su número. Ahora bien, responde Frege, si esto quiere decir que «tenemos que hacer abstracción de las peculiaridades de los individuos» o que «en la consideración de las cosas separadas se prescinde de los caracteres por los que las cosas se diferencian», entonces no nos queda el concepto de número de las cosas consideradas, sino el concepto bajo el que caen esas cosas: «si yo, por ejemplo, al considerar un gato negro y un gato blanco, prescindo de las propiedades por las que se distinguen, obtengo quizás el concepto de "gato"»[21]. Esto es: si para considerarlas bajo el prisma de su número dos cosas han de ser iguales en cualquier aspecto que consideremos, entonces no tenemos dos unidades sino una sola, puesto que no puede haber dos unidades que puedan ser idénticas bajo cualquier aspecto y sean, con todo, dos unidades.

¿Qué es lo que sucede entonces? Ahora parece que ya no es cierto que para que podamos atribuirle un número a un conjunto de unidades necesiten éstas ser semejantes *bajo cualquier aspecto que consideremos*. Lo que sí resulta necesario es que tales unidades *caigan bajo un mismo concepto*. Un gato blanco y un gato negro caen bajo el mismo concepto (el concepto «gato») sin por ello dejar de ser uno blanco y el otro negro.

Esto nos pone en la pista de la solución de Frege. Así leemos:

> Para clarificar un poco la cuestión será bueno considerar el número en el contexto de un juicio, donde aparece su modo de aplicación originario. Cuando frente al mismo fenómeno exterior puedo decir con igual verdad: «Esto es un grupo de árboles» y «Esto son cinco árboles», o bien «Aquí hay cuatro compañías» y «Aquí hay 500 hombres», en tal caso no se modifica ni lo individual ni la totalidad, el agregado, sino sólo mi denominación. Pero esto sólo es síntoma de que se ha reemplazado un concepto por otro. Con ello se nos sugiere [...] que al asignar un número se afirma algo sobre un concepto. Cuando digo: «Venus tiene 0 lunas», no es que haya allí ninguna luna o agregado de lunas del que pudiera afirmarse algo; pero al concepto «luna de Venus» se le atribuye una propiedad, a saber, la de que nada cae bajo él. Si digo: «Del coche del Káiser tiran cuatro caballos», atribuyo el número cuatro al concepto «caballo que tira del coche del Káiser»[22].

[21] *Fundamentos de la Aritmética*, p. 62
[22] Ibíd., pp. 72-73.

Esto es: un enunciado numérico (esto es: el decir cuántas cosas hay de cierto género) lo que contiene es *una aserción sobre un concepto*. Si digo, utilizando los ejemplos de Frege, que «El coche del Káiser es tirado por cuatro caballos», ese enunciado no atribuye propiedad alguna a los caballos *efectivos* que tiran del coche del Káiser sino al *concepto* «caballo que tira del coche del Káiser». Del mismo modo «Venus tiene 0 lunas» no atribuye propiedad alguna a las *lunas efectivas* de Venus (que el enunciado dice que no hay), sino al *concepto* «luna de Venus». Naturalmente, pueden hacerse otras aserciones distintas de las numéricas sobre conceptos. Así, decimos, «Todos los cuerpos son pesados» o «Hay caballos». En tales casos parece que estamos hablando de cuerpos efectivos o de caballos efectivos. Pero ni el primero de los enunciados es una generalización sobre cuerpos ni el segundo es un enunciado sobre caballos. (Frege recuerda aquí que, en general, es imposible hablar de objetos sin designarlos de alguna manera, y en tales enunciados no aparece signo alguno que designe objetos.) En el primero se *subordina* el concepto de cuerpo al de peso y en el segundo se afirma que el concepto caballo tiene al menos una instancia[23].

Frege hace a continuación una analogía entre existencia y número: la afirmación de existencia («Hay al menos uno») equivale a la negación de que el concepto al que se la atribuimos tiene la propiedad de que el número que le atribuimos es 0. Esto, naturalmente, hace de la existencia también una propiedad de los conceptos: decir que, por ejemplo, hay caballos, no es otra cosa que afirmar que al «concepto caballo» no tiene la propiedad de que le pertenezca el 0, o, dicho de otra manera, que el «concepto caballo» tiene instancias. Dado que la existencia es una propiedad de conceptos, se seguiría, de acuerdo con Frege, que la prueba ontológica de la existencia de Dios no alcanza su objetivo. El que hay

[23] Es necesario distinguir claramente aquí entre las propiedades (*Eigeschaften*) que se afirman de un concepto y las características (*Merkmale*) que componen el concepto. Estas últimas, afirma Frege, no son propiedades del concepto, sino de las cosas que caen bajo el concepto. En el concepto «triángulo rectángulo», «rectángulo» no es una propiedad del concepto «triángulo rectángulo», sino de los objetos que caen bajo el concepto «triángulo rectángulo». Ahora bien, la aserción de que no hay ningún triángulo rectángulo, rectilíneo y equilátero atribuye una propiedad al concepto «triángulo rectángulo, rectilíneo y equilátero», a saber: la de que el número que le pertenece es 0.

uno y sólo un Dios no es una propiedad del *objeto* que caería bajo el concepto Dios (no es un *componente* del concepto Dios), sino una *propiedad* del concepto Dios.

Obsérvese que hasta aquí Frege no ha definido el concepto general de número, sino que sólo ha llegado a la conclusión de que el contenido de un enunciado numérico es una aserción sobre un concepto. Pero, habiendo aceptado que si se tuviera una definición satisfactoria de los números 0 y 1 y de la relación «ser sucesor» se podrían derivar los demás números, Frege enuncia las definiciones siguientes:

1. A un concepto *F* le corresponde el número 0 cuando, sea lo que sea *a*, vale con toda generalidad el enunciado de que *a* no cae bajo ese concepto.
2. A un concepto *F* le corresponde el número 1 cuando, sea lo que sea *a*, no vale con toda generalidad el enunciado de que *a* no cae bajo *F* y cuando de los dos enunciados «*a* cae bajo *F*» y «*b* cae bajo *F*» se sigue con toda generalidad que *a* y *b* son el mismo.
3. Al concepto *F* le corresponde el número $(n + 1)$ cuando existe un objeto *a* que cae bajo *F* y tal que el concepto «que cae bajo *F*, pero no *a*», le corresponde el número *n*[24].

Ahora bien, Frege se apresura a afirmar que mediante esto no se ha definido en absoluto 0 y 1; si acaso lo que hemos fijado es el sentido de las expresiones «el número 0 corresponde a» y «el número 1 corresponde a» pero, se pregunta, ¿nos está permitido a partir de ellas distinguir entre el 0 y el 1 como objetos independientes y reconocibles tantas veces como queramos?

Téngase en cuenta que, de acuerdo con la discusión de algunos párrafos citados anteriormente, un enunciado numérico contiene una aserción sobre un concepto. Por consiguiente, en la expresión «al concepto *F* le corresponde el número 0» no estamos diciendo que 0 sea una propiedad del concepto *F*; la propiedad de *F* es más bien *el que le pertenezca el número 0*, y, en general, cualquier número que aparezca en un enunciado numérico, es un objeto autónomo «precisamente» —afirma Frege— porque constituye únicamente una parte de la afirmación». Ahora bien, la autonomía y autosuficiencia de los números aparece por doquier, sobre todo en matemáticas, donde los enunciados favoritos

---

[24] *Fundamentos de la Aritmética*, p. 81.

son las ecuaciones[25]. Parece, por tanto, necesario embarcarse en la tarea de proporcionar definiciones de los números como tales objetos.

Por tanto, si los números son objetos autosuficientes, y una característica de tales objetos es que puedan reconocerse una y otra vez, entonces debe de haber enunciados que expresen que tales objetos se reconocen recurrentemente. Esto es: «Si el signo *a* tiene que designar un objeto, tendremos que disponer de un criterio para decidir en cualquier caso si *b* es el mismo que *a*, aun cuando no esté siempre en nuestras manos poder aplicar ese criterio»[26]. De este modo, para establecer un criterio general para igualdad de números deberíamos determinar el sentido del enunciado

> El número que corresponde al concepto *F* es el mismo que corresponde al concepto *G*.

Sin usar la expresión

> «el número que corresponde al concepto *F*»

dado que esta expresión presupone que hemos identificado ya el número que corresponde al concepto *F*. Pero es obvio que sólo podemos dar nombre a un número y reconocerlo como el mismo número una vez que hemos determinado el sentido de tal enunciado.

Para lograr esto, Frege se acoge a una sugerencia de Hume: «Si se combinan dos números de manera que el uno tenga una unidad que le corresponda a toda unidad del otro, entonces los declaramos iguales.» Esto es: Frege adopta la posición de que es posible definir la igualdad numérica en términos de una aplicación biyectiva. Parafraseando sus propios enunciados: «El número que corresponde al concepto *F*, es el mismo que el número que corresponde al concepto *G*, si toda unidad que cae bajo *F* puede aplicarse biyectivamente con toda unidad que caiga bajo *G*.» Tomando como base esta idea tan simple, lo que Frege se propone es definir

---

[25] El que los números aparezcan a veces *desde el punto de vista gramatical* como atributos no debe despistarnos. La oración «Júpiter tiene cuatro lunas» se puede transformar en «El número de lunas de Júpiter es cuatro», donde «es» tiene el sentido de «es igual a», una expresión flanqueada por números.

[26] *Fundamentos de la Aritmética*, p. 86.

el concepto de número en términos del concepto de igualdad numérica construyendo una ecuación tal que cada uno de sus miembros sea un número.

Consideremos para ello la noción de equivalencia (*gleichzhaligkeit*) entre conceptos. Diremos que el concepto *F* es equivalente al concepto *G* si hay una aplicación biyectiva entre los objetos que caen bajo *F* y los objetos que caen bajo *G*. Puede establecerse entonces la definición siguiente:

> El número que corresponde al concepto *F* es la extensión del concepto «equivalente al concepto *F*».

De este modo, sea *F* el concepto «pecado capital». A este concepto le corresponde el número 7, pues siete son los pecados capitales. Hay, de acuerdo con Frege, muchos conceptos que son equivalentes a «pecado capital»; por ejemplo: «jinete del Apocalipsis», «enano del cuento de Blancanieves», «colina de Roma», «sabio de Grecia», etc. El número que pertenece al concepto «pecado capital» es la extensión del concepto «equivalente al concepto pecado capital». Tal extensión es una clase de conceptos: *la clase de los conceptos que se aplican a siete y sólo siete objetos*. Con ello la definición de Frege tendría como resultado que el número 7 es la clase de conceptos que tiene en este sentido la propiedad especificada.

Ahora bien, una vez que hemos definido la noción de «número que corresponde a un concepto», puede definirse ya «número»: la expresión «*n* es un número» va a significar lo mismo que la expresión «existe un concepto tal que *n* es el número que le corresponde»[27]. De esta manera se ha definido el concepto de número y no de manera circular ya que «el número que corresponde al concepto *F*» se ha definido con anterioridad.

Una vez que se ha dado la definición general de número como clase de conceptos equivalentes, Frege se aplica a la tarea de definir los números individuales. Para hacerlo, tiene que encontrar un concepto adecuado que especifique cada conjunto. Como hemos visto, el número 7 podría definirse como el conjunto de los conceptos equivalentes al concepto «pecado capital». ¿Es éste un concepto adecuado para nuestros fines? Frege respondería sin

---

[27] Ibíd., pp. 96-97.

duda que un concepto como éste resulta perfectamente inútil en el contexto de la reducción de la aritmética a la lógica: el que haya siete y sólo siete pecados capitales no es evidentemente nada que tenga que ver con la lógica. En este sentido, lo que hace Frege es definir los números naturales en términos de 0, 1 y la relación «sucesor».

Veamos en primer lugar cómo define Frege la relación en la que están dos miembros adyacentes de la serie de los números naturales. De acuerdo con su argumentación, la proposición

> Existe un concepto *F* y un objeto que cae bajo él, *x*, tal que el número que pertenece al concepto *F* es *n* y el número que pertenece al concepto «cae bajo *F* pero no es idéntico a *x*» es *m*

significa lo mismo que

> *n* sigue directamente detrás de *m* en la serie de los números naturales[28].

Veamos de nuevo con un ejemplo qué es lo que se dice aquí. Tómese el concepto «planeta del sistema solar». El número que pertenece a este concepto es, por lo que sabemos, 9, esto es: hay 9 objetos que caen bajo él. Tomemos uno de esos objetos, por ejemplo, Venus. El número que pertenece al concepto «planeta del sistema solar no idéntico con Venus» es 8; y 9 es el sucesor inmediato de 8. Naturalmente, Frege no puede usar este concepto para sus propósitos porque de nuevo el concepto «planeta del sistema solar» no tiene nada que ver con la lógica.

Buscando una definición que involucre sólo términos lógicos, Frege define 1 tomando como base el predicado «idéntico a 0». Hay uno y sólo un objeto que cae bajo tal concepto, a saber: el número 0. Pero bajo el concepto «idéntico con cero, pero no idéntico con cero» no cae ningún objeto, dado que todo objeto es autoidéntico y esto es una verdad lógica que conocemos *a priori*; por consiguiente, Frege puede usarla para dar una definición de 0. En otras palabras: el cero es la clase de todos los conceptos vacíos, el conjunto de todos los conceptos bajo los que no cae ningún objeto. Podemos escribir entonces:

---

[28] Ibíd., p. 100.

> 0 es el número que pertenece al concepto «idéntico a 0, pero no idéntico a 0»,
> 1 es el número que pertenece al concepto «idéntico a 0».

Dado que bajo el concepto «idéntico a 0» cae sólo un objeto, 1 será obviamente el conjunto de todos los conceptos unitarios, esto es: la clase de todos los conceptos bajo los que cae un solo objeto. Como resultado de esta definición puede establecerse entonces que 1 sigue inmediatamente después de 0 en la serie de los números naturales. De acuerdo con la definición de sucesor antes mencionada, tenemos aquí un concepto «idéntico a 0» y un objeto que cae bajo él, a saber: 0, tal que el número que pertenece al concepto «idéntico a cero» es 1, y el número que pertenece al concepto «idéntico a cero, pero no idéntico a cero» es cero. Y esto equivale a decir, de acuerdo con la definición, que 1 sigue inmediatamente a cero en la serie de los números naturales.

A su vez puede definirse

> 2 es el número que pertenece al concepto «idéntico a 0 ó 1».

2 será naturalmente la clase de todos los conceptos bajo los que caen dos objetos. Que 2 sigue inmediatamente a 1 es también obvio. De acuerdo con la definición de sucesor, hay aquí un concepto «idéntico a 0 ó a 1» y dos objetos que caen bajo él, a saber: 0 y 1, de modo que el número que pertenece al concepto «idéntico a 0 o a 1» es 2 y el número que pertenece al concepto «idéntico a 0 o a 1, pero no idéntico a 0» es 1.

Resulta evidente que los números así definidos están de acuerdo con el principio de inducción aritmética. Es más, Frege mostró también que para cualquier número *n* en la serie de los números naturales siempre existe un n+1 o, dicho de otra manera, que la serie no tiene fin.

Frege acaba *Grundlagen* afirmado que es bastante verosímil que las verdades aritméticas sean analíticas y *a priori*. Que conceda sólo verosimilitud al estatuto de las verdades aritméticas no es un gesto de prudencia por parte de Frege: sólo está llamando la atención sobre el carácter informal de las pruebas en *Grundlagen* que deberán llevarse a cabo de forma más rigurosa utilizando el lenguaje de la conceptografía. *Grundgesetze* intenta demostrar efectivamente la tesis logicista, esto es: la reducción de la mate-

mática a la lógica, deduciendo los teoremas aritméticos en el cálculo lógico. El descubrimiento por parte de Russell de la paradoja que afectaba al sistema de *Grundgesetze* sumió a Frege en la amargura más profunda, pero también ha quedado en la historia de la ciencia como ejemplo singular de integridad.

FUNCIÓN, CONCEPTO Y OBJETO

En el lapso de tiempo que va desde la publicación de *Grundlagen* (1884) hasta la aparición del volumen I de *Grundgesetze* (1893) las tesis capitales de Frege sobre metafísica y filosofía del lenguaje experimentaron una serie de profundos cambios reflejados sobre todo en tres artículos: «Función y concepto», «Concepto y objeto» y «Sobre sentido y referencia». Estos ensayos son considerados como clásicos de la filosofía del lenguaje aunque merecen atención por sí mismos. «Función y concepto», por ejemplo, resuelve de manera magistral el problema de explicar cómo una oración es un todo articulado (esto es: no se trata de una mera lista) y proporciona los elementos para una explicación razonable de cómo es posible decir algo verdadero o falso mediante ella. No debe perderse de vista, sin embargo, que estos ensayos fueron concebidos por Frege, una vez más, como herramientas auxiliares en su tarea de reducir la aritmética a la lógica.

Como resultado de su análisis de los enunciados en términos de función y concepto realizada en *Begriffsschrift*, Frege subrayó la distinción entre concepto y objeto en *Grundlagen*, donde el término «función» apenas aparece. En «Función y concepto» es donde se precisan estas nociones fundamentales de su sistema. Desde el comienzo de este artículo Frege muestra su insatisfacción con la concepción de función que tenían los matemáticos de su época. ¿Qué se entendía en matemáticas por función? Por función se entendía, afirma Frege, una expresión del cálculo que contenga x, una fórmula que incluya la letra x. Así la expresión «$2x^3+x$» sería una función de x, mientras que la expresión «$2 \cdot 2^3+2$» sería función de 2. Frege considera por qué esta concepción es completamente insatisfactoria: en ella no se distingue forma y contenido, signo y cosa designada. ¿Cuál es entonces el contenido, la referencia de «$2 \cdot 2^3+2$»? Frege se apresura a decir que es el mismo que el de «18» o el de «$6 \cdot 3$». No obstante esto no resulta de excesivo

valor, pues una función no es *sólo* la referencia de una expresión. Si así fuera, una función del cálculo sería solamente un número y ¿qué habríamos ganado con ello en aritmética? Pero, si como habitualmente se hace, pensamos en las funciones como expresiones del tipo «$2x^3+x$», entonces tampoco estamos en mejor situación pues «$2x^3+x$» sólo indica un número de manera indeterminada, de modo que utilizar la estructura funcional tampoco representaría ninguna ventaja especial. No obstante, la aparición de x sí puede llevarnos a la concepción correcta. Se suele llamar a x el argumento de la función, de modo que en «$2\cdot1^3+1$», «$2\cdot4^3+4$», «$2\cdot5^3+5$», tenemos la *misma función* aunque con *argumentos diferentes*. Una función será entonces «lo que estas expresiones tienen en común», a saber: «$2\cdot(\ )^3+(\ )$»[29].

Característicamente, una función es algo incompleto, insaturado, que se convierte en un todo completo cuando se le añade el argumento. Aquello en lo que una función se convierte cuando se la completa por medio de un argumento es el *valor* de la función para ese argumento. Así el valor de la función «$2(\ )^3+(\ )$» para el argumento 1 sería 3 dado que $2\cdot1^3+1=3$. El valor de una función matemática, igual que su argumento, es siempre un número.

En «Función y concepto» Frege introduce una de sus nociones más problemáticas, la de *recorrido* (*wertverlauf*) de una función. Utilizando el método de la geometría analítica podemos representar de modo intuitivo los valores de una función para distintos argumentos. Si consideramos el argumento como valor numérico de una abscisa y el valor correspondiente de la función como valor numérico de la ordenada, obtenemos un conjunto de puntos que se presentan normalmente como una curva. Así, por ejemplo, $y=x^2-4$ da lugar a una parábola donde y (el valor de la función) indica el valor de la coordenada y x (el argumento) indica el valor de la abscisa. Dado que $x(x-4)$ y x^2-4x tienen siempre el mismo valor para el mismo argumento (y por consiguiente, sus curvas son las mismas) tenemos que $x(x-4)=x^2-4x$, o dicho de otra manera: las funciones $x(x-4)$ y x^2-4x tienen el mismo recorrido. Esto no quiere decir, aclara inmediatamente Frege, que ambas

[29] Como ha puesto de manifiesto Kenny, *op. cit.*, p. 103, las propias palabras de Frege «lo que estas expresiones tienen en común» son desorientadoras porque parecen indicar que la función es de naturaleza lingüística. Más bien se debería entender como «lo que es común al contenido de esas expresiones».

sean *la misma* función, pues dos funciones no son idénticas porque tomen siempre el mismo valor para el mismo argumento. Lo que sucede es que para cualquier argumento que reemplace a x siempre vale la ecuación $x(x-4)=x^2-4x$ o, lo que es lo mismo: esta ecuación vale de manera general. Pero también podríamos expresarlo así: el recorrido de $x(x-4)$ y el recorrido de x^2-4x son idénticos, donde los recorridos son considerados como objetos autosuficientes del tipo de los números[30].

Una importantísima aportación de «Función y concepto» es la explicitación de la ampliación de la noción de función que Frege ya había emprendido en *Begriffschrift*. Consideremos ahora la función $x^2=1$. ¿Cuáles son los valores de esta función para diferentes argumentos? Si reemplazamos x por –1, 0, 1 y 2 obtenemos:

$$(-1)^2=1$$
$$(-0)^2=1$$
$$(1)^2=1$$
$$(2)^2=1.$$

Ahora bien, de estas expresiones, la primera y la tercera son verdaderas y la segunda y la cuarta son falsas. Pues bien, el valor de una función de este tipo es un valor de verdad. Hay dos valores de verdad: lo verdadero y lo falso, de modo que la primera y la tercera de estas expresiones tienen como valor de verdad lo verdadero (tienen como referencia lo verdadero) y la segunda y la cuarta tienen como valor de verdad lo falso (tienen como referencia lo falso). Además, dado que «$2^2=4$» y «$2>1$» y «$2^4=4^2$» se refieren a lo mismo:

$$2>1=2^4=4^2$$

es una ecuación cuyo valor es lo verdadero. Ahora bien, el que las expresiones «$2>1$» y «$2^4=4^2$» tengan idéntica referencia no quiere decir que expresen el mismo pensamiento, que tengan el mismo

[30] Frege deja sin explicar esta nueva categoría de objetos que introduce: «Que es posible concebir la generalización de una igualdad entre valores de función como una igualdad, es decir, como una igualdad entre recorridos, me parece que no hay que demostrarlo, sino que tiene que ser considerado como un principio lógico», p. 60 de este volumen.

sentido. Frege introduce aquí de manera completamente explícita su distinción entre sentido (*Sinn*) y referencia (*Bedeutung*) de la que nos ocuparemos más adelante.

En el caso de la función $x^2=1$, su valor, como ya se ha visto anteriormente, es siempre un valor de verdad. Si para un determinado argumento, pongamos por caso –1, el valor de esta función es lo verdadero, podríamos expresar así esta circunstancia: «el número –1 tiene la propiedad de que su cuadrado es 1» o, dicho de otra manera, «–1 cae bajo el concepto raíz cuadrada de 1». Si el valor de la función $x^2=1$ es lo falso para el argumento 2, entonces podríamos expresar esto diciendo: «2 no es raíz cuadrada de 1» o «2 no cae bajo el concepto raíz cuadrada de 1». Es aquí obvia la conexión que se da entre lo que en *Grundlagen* se ha denominado concepto y lo que aquí se llama función: una función no es más que un concepto cuyo valor es siempre un valor de verdad. Esto quiere decir que hay expresiones funcionales, por ejemplo «el autor de ...» que no son conceptos, dado que para un argumento adecuado su valor no es un valor de verdad. En este caso, para el argumento *El Quijote* el valor de la función es Cervantes y, en general, para cualquier obra como argumento, el valor de la función es un autor.

Cuando dos funciones tienen siempre para el mismo argumento el mismo valor, decimos que esas dos funciones tienen el mismo recorrido. Al recorrido de una función cuyo valor para todo argumento es un valor de verdad, Frege lo denomina extensión de un concepto. De este modo se precisa[31] la noción de extensión —ya utilizada en *Grundlagen* en su versión tradicional— como conjunto de objetos que caen bajo un concepto. Ahora, la extensión de un concepto será un conjunto de pares de objetos tal, que el primer miembro del par será un objeto y el segundo un valor de verdad (que también es un objeto). Así, la extensión del concepto *filósofo* sería el conjunto de todos los pares tales que, si el primer objeto del par es un filósofo, el segundo es lo verdadero y, si el primer miembro del par no es un filósofo, el segundo miembro del par es lo falso. Si tenemos en cuenta que el número de los objetos del mundo es constante las extensiones de los conceptos serían las mismas y su diferencia consistiría en las correspondencias entre

[31] Cfr. Kenny, *op. cit.*, pp. 111-112.

objetos y valores de verdad. Además, desaparecen los problemas para asignar una extensión —desde el punto de vista de la concepción tradicional— a conceptos vacíos como *sirena* o *no idéntico consigo mismo*. La única diferencia con los conceptos no-vacíos residiría en que, en este caso, el segundo de los miembros del par sería siempre (el objeto) lo falso.

En «Función y concepto» Frege extiende su análisis a todo tipo de enunciados. Así, si tomamos el enunciado

César conquistó las Galias,

podemos descomponerlo en «César» y «... conquistó las Galias». Esta segunda parte es insaturada, ya que tiene un lugar vacío, y cuando se rellena con un nombre propio da lugar a una expresión con sentido completo. Ahora bien, a diferencia de su análisis anterior, Frege afirma aquí que la función es el significado de la parte insaturada, y el argumento es el objeto César (y no el nombre «César»). Además, se extiende también el rango de lo que puede considerarse como argumento de modo que alcanza cualquier objeto. ¿Y qué es lo que llamamos objeto? Frege reconoce que

> Tengo por imposible dar una definición de tipo escolar, puesto que aquí tenemos algo que, debido a su simplicidad, no admite una descomposición lógica. Sólo es posible señalar lo que se quiere decir. Aquí sólo puedo decir brevemente esto: objeto es todo lo que no es una función, cuya expresión no conlleva, por tanto, un lugar vacío[32].

En «Función y concepto», Frege introduce también el signo de aserción, el signo de negación y el cuantificador universal junto con las correspondientes explicaciones de cómo se pueden usar para expresar generalizaciones y enunciados existenciales. La novedad que presenta esto respecto de *Begriffsschrift* consiste en que ahora la referencia de una proposición es un valor de verdad. Así, en vez de afirmar que la función $\forall x\,(Fx)$ significa que la función resulta verdadera para cualquier argumento que reemplace a x, lo que se dice ahora es que el signo «$\forall x\ Fx$» tiene como referencia lo verdadero cuando la función Fx tiene lo verdadero como su valor para cualquier argumento.

---

[32] Ver pp. 66 de este volumen.

«Sobre concepto y objeto»[33] analiza, comentando algunas objeciones que habían sido hechas por el matemático Bruno Kerry, la cuestión de si algo puede ser al mismo tiempo concepto y objeto. Frege aclara en este artículo que la naturaleza del concepto es esencialmente predicativa, que un concepto es la referencia de un predicado, mientras que un objeto, nunca puede ser la referencia total de un predicado, sino que puede ser la referencia de un sujeto. Si la referencia de un predicado es un concepto, ¿cuál es entonces su sentido? «Sobre concepto y objeto» no aclara en absoluto este punto e incluso algunas observaciones de Frege podrían llevar a la conclusión de que, para él, los predicados carecen de sentido. Sólo en uno de sus escritos póstumos, la «Introducción a la lógica»[34], de 1906, identifica la parte insaturada del pensamiento que expresa una oración con el sentido de un predicado[35].

Aunque un objeto pueda ser parte de un predicado, su posición claramente expresada en este artículo es que existe una asimetría entre conceptos y objetos que podría expresarse así: los objetos pueden caer bajo conceptos, mientras que los conceptos no pueden caer bajo objetos. Una de las objeciones a esta separación más vigorosamente discutidas por Frege es la que se refiere a las relaciones entre los conceptos de primero y segundo nivel. Como hemos visto al hablar de *Begriffsschrift*, un concepto del primer nivel puede caer bajo un concepto del segundo nivel. Así, el enunciado:

El concepto *caballo* tiene instancias,

dice que el concepto *caballo* cae bajo el concepto de segundo nivel *tener instancias*. Ahora bien, Frege había establecido que un criterio para distinguir un objeto de un concepto era la presencia del artículo determinado: si tal artículo precede a una expresión, entonces esa expresión designa a un objeto y no a un concepto. De aquí se seguiría que el concepto *caballo* no es un concepto. ¿Por qué, entonces, la ciudad de Berlín sí es una ciudad, o el volcán Ve-

---

[33] Ver pp. 123-139 de este volumen.

[34] Ver pp. 171-187 de este volumen.

[35] Para un diagrama explicativo hecho por el propio Frege sobre los sentidos y las referencias de los conceptos y los objetos, ver la «Carta a Husserl» de 1891, p. 79 de este volumen.

subio es un volcán? Parece pues que tenemos que explicar esta excepción. Pero sucede también que, cuando atribuimos al concepto *caballo* la propiedad de tener instancias, la expresión «el concepto caballo» se refiere a un concepto, mientras que, de acuerdo con el criterio de Frege, tiene que referirse a un objeto.

Frege soluciona este problema —que ha dado lugar a múltiples discusiones entre los comentadores— manteniendo que la expresión «el concepto *caballo*» designa efectivamente un objeto y justamente por eso afirma que no designa un concepto. Kenny[36] encuentra que en una nota a pie de página de «Concepto y objeto», Frege proporciona una robusta justificación de su postura. Dice Frege allí:

> Una cosa similar sucede respecto de la oración «Esta rosa es roja». El predicado gramatical «es roja» pertenece al sujeto «esta rosa». Aquí las palabras «el predicado gramatical "es roja"» no son un predicado gramatical sino un sujeto. Por el mismo acto de llamarlo predicado lo privamos de esta propiedad.

Esto es, cuando decimos

El concepto *caballo* no es un concepto.

Hemos objetivado el concepto *caballo* para decir de él que no es un concepto. Pero, justamente por eso, lo que aparece como sujeto de la oración anterior no tiene como referencia un concepto (que sí haría de ella un sinsentido), sino un objeto del que podemos decir con verdad que no es un concepto.

SENTIDO Y REFERENCIA

En *Begriffsschrift* Frege mantuvo que la identidad no podía ser una relación entre objetos. Efectivamente, si así fuese entonces «*a*=*b*» y «*a*=*a*» transmitirían la misma información en el caso en que «*a*=*b*» fuese verdadero. Pues si «*a*=*b*» fuese verdadero resultaría que «*a*» y «*b*» serían nombres del mismo objeto y, por consiguiente «*a*=*b*» no contendría más información que «*a*=*a*». Pero es obvio que «*a*=*b*» contiene más información que «*a*=*a*», luego la

---

[36] *Op. cit.*, pp. 123-125.

relación de identidad no puede ser una relación entre objetos. Frege resolvía entonces el problema afirmando que se podía dar cuenta de la diferencia entre «*a*=*b*» y «*a*=*a*» argumentando que aunque tales enunciados no son sobre objetos, sin embargo sí son sobre nombres: «*a*=*b*» afirma que «*a*» y «*b*» son dos nombres del mismo objeto, y esto no es una trivialidad (como lo sería decir que «*a*» y «*a*» son nombres del mismo objeto).

En «Sobre sentido y referencia»[37], artículo que ha marcado gran parte de la agenda de la filosofía del lenguaje contemporánea, Frege rechaza esta solución al problema que plantean los enunciados de identidad. De acuerdo con su propuesta, cuando afirmó «*a*=*b*» estaría dando información sobre los signos «*a*» y «*b*». Ahora bien, que «*a*» y «*b*» se usen como signos del mismo objeto es un producto de una decisión arbitraria, mientras que, por ejemplo, cuando usó el enunciado «Venus es el lucero de la mañana» no quiero transmitir información alguna acerca de una convención del castellano sino más bien quiero hablar de un cuerpo celeste. Frege arbitra ahora la solución siguiente: los términos singulares (esto es: nombres propios y descripciones) que flanquean el signo de identidad tienen tanto un sentido (*Sinn*) como una referencia (*Bedeutung*). De acuerdo con esto, tanto

(1) «Venus es Venus»,

como

(2) «Venus es el lucero de la mañana»

serían verdaderos, pero, mientras que (1) no es informativo, (2) lo sería. La razón es que en (1) ambos nombres tienen la misma referencia (el planeta Venus en este caso, pues la referencia de un término singular es el objeto mismo que el término designa) pero también tienen idéntico sentido. Mientras que en (2), los términos singulares a ambos lados de la expresión para identidad tienen la misma referencia (nuevamente el planeta Venus) pero *distinto* sentido. Frege entiende por «sentido» de un término singular «el modo de presentación» de un objeto. ¿Qué quiere decir esto? Frege

---

37 Ver pp. 84-111 de este volumen.

habla del sentido en términos casi exclusivamente metafóricos: el sentido es el método para captar la referencia, o la ruta que me lleva a la referencia, etc. Michael Dummett ha desarrollado esta intuición de Frege señalando que la noción de sentido es esencialmente *epistémica*: captar un sentido es asociar con el nombre un modo particular de alcanzar su referente. Ahora bien, esto no quiere decir que el sentido sea una representación o una imagen: una representación es algo subjetivo mientras que el sentido, sin ser el objeto en que consiste la referencia es, con todo, objetivo. Con el objeto de clarificar la objetividad del sentido Frege utiliza la siguiente comparación. Supóngase que estamos observando la Luna mediante un telescopio. La Luna sería en este caso la referencia. Tanto en la lente del telescopio como también en la retina del observador se refleja una imagen de la Luna. La imagen reflejada en la lente corresponde al sentido. Ciertamente esta imagen es parcial ya que depende, por ejemplo, del lugar donde se coloca el telescopio, pero con todo es objetiva en el sentido de que distintos observadores pueden servirse de esa misma imagen. La imagen reflejada en la retina correspondería a las representaciones privadas; en efecto: cada uno tendría su propia e intransferible imagen retiniana lo mismo que cada uno puede tener sus propias representaciones cuando capta el sentido de un término singular.

No sólo los términos singulares tienen sentido y referencia, sino que también lo tienen (como ya había sido puesto de manifiesto en «Sobre función y concepto») las oraciones declarativas[38]. Una oración declarativa completa contiene un pensamiento[39] y Frege se pregunta si tal pensamiento no podría ser la referencia de una oración declarativa. Si en

(3) El lucero de la mañana es un cuerpo iluminado por el Sol

substituimos «el lucero de la mañana» por «el lucero de la tarde», esto es: una expresión por otra con la misma referencia, obtendríamos:

---

[38] En «Comentarios sobre sentido y referencia» Frege extiende la distinción a expresiones para conceptos. Ver pp. 112-122 de este volumen.

[39] Téngase en cuenta que por «pensamiento» Frege no entiende el acto psicológico de pensar. Cfr. a este respecto «El pensamiento», pp. 187-117 de este volumen.

(4) El lucero de la tarde, un cuerpo iluminado por el Sol;

(4) continúa teniendo *la misma referencia* que (3) aunque tiene *distinto sentido*. Es obvio que quien no supiese que los términos «el lucero de la mañana» y «el lucero de la tarde» tienen la misma referencia podría tomar a uno de los enunciados por verdadero y a otro por falso. Ahora bien los pensamientos expresados por (3) y (4) son distintos. Por consiguiente el pensamiento no puede considerarse como la referencia de una oración declarativa, sino que ha de ser su sentido. Hemos supuesto que (3) y (4) tienen una referencia, pero ¿en qué consiste? Hay oraciones que tienen sentido pero no referencia. Dado que es dudoso que en la oración

(5) Ulises fue dejado en Ítaca profundamente dormido

el nombre «Ulises» tenga referencia, es dudoso que (5) tenga una referencia. Ahora bien, si alguien estuviera interesado en saber si (5) es verdadero o falso, tiene que atribuirle una referencia a «Ulises» puesto que es del hombre Ulises, y no del nombre «Ulises» del que se afirma o niega el predicado. En consecuencia, lo que sucede en (5) es que una de sus partes carece de referencia y, al ser la referencia de toda la oración (5) función de la referencia de sus partes, el resultado es que toda la oración (5) carece de ella. Obsérvese que el pensamiento expresado por (5) no se altera por el hecho de que una de sus partes carezca de referencia; pero, si nos interesamos por la referencia de una de las partes, esto es señal de que estamos interesados por la referencia del todo. Como dice Frege, «es la búsqueda de la verdad lo que nos impulsa a avanzar del sentido a la referencia». La referencia de una oración declarativa es entonces *un valor de verdad* (la circunstancia de que la oración sea verdadera o falsa). Es más, Frege extiende el modelo de los términos singulares a las oraciones: una oración declarativa *tiene un sentido* —aquello que me señala la ruta hacia el referente— y *nombra* una referencia (que en este caso es también un objeto, un valor de verdad). Pero, si la referencia de una oración declarativa es un valor de verdad, se sigue que todas las oraciones declarativas verdaderas tienen la misma referencia y también todas las falsas, con lo que en el reino de la referencia desaparece toda singularidad. No es posible entonces limitarnos sólo a la referencia, pero tampoco el sentido aislado proporciona algún cono-

cimiento: necesitamos el pensamiento *con* su referencia. Justamente el juzgar es el paso del pensamiento al valor de verdad.

Las oraciones declarativas pueden combinarse para dar lugar a oraciones compuestas. Si esas combinaciones se llevan a cabo mediante las conectivas «y», «o», «no», «si... entonces», estamos ante un caso semejante al de (3) y (4). Si en un compuesto como, por ejemplo

(6) Aristóteles escribió las *Categorías* y Platón escribió el *Banquete*

substituimos la primera de las oraciones por otra de idéntica referencia, por ejemplo: «La Luna es un satélite de la Tierra» obtendríamos una oración como

(7) La Luna es un satélite de la Tierra y Platón escribió el *Banquete*,

que tiene la misma referencia que (6). Este modo de composición de oraciones es veritativo-funcional, vale decir: la referencia (los valores de verdad) de las oraciones compuestas de esta manera es función exclusivamente de las referencias (los valores de verdad) de las oraciones componentes, y no de sus contenidos. Igual que en (3) habíamos reemplazado un término por otro con la misma referencia pero diferente sentido para obtener (4), que tiene idéntica referencia, pero diferente sentido que (3), aquí hemos reemplazado en (6) una oración por otra con diferente sentido, pero con idéntica referencia, y hemos obtenido (7), que tiene la misma referencia que (6) pero distinto sentido.

La segunda parte de «Sobre sentido y referencia» está dedicada a analizar algunos casos en los que esto no sucede. Tomemos la oración siguiente:

(8) Copérnico creía que las órbitas planetarias son círculos.

Si (8) fuese veritativo-funcional, entonces podríamos substituir «las órbitas planetarias son círculos» por otra oración con su misma referencia. Podríamos substituirla por la oración, pongamos por caso, «la Luna está hecha de queso verde». De este modo obtendríamos

(9) Copérnico creía que la Luna está hecha de queso verde.

Pero, por todo lo que sabemos, mientras que Copérnico creía la falsedad expresada en (8) su credulidad no alcanzaba a (9). Parece entonces que el criterio de substitutividad de idénticos por idénticos falla estrepitosamente y con ello se pondría en peligro el criterio usado anteriormente para asignar sentidos y referencias. No obstante, Frege mantiene que el fallo de principio de substitutividad es sólo *aparente*. En casos como (8) y (9) lo que tenemos son contextos oblicuos (*ungerade*) y en estos contextos la oración subordinada no tiene como referencia un valor de verdad, sino el sentido habitual de la subordinada. Esto parece en principio bastante razonable pues ¿no resulta extraño decir que lo que Copérnico cree es un valor de verdad? El fallo es sólo aparente porque en (8) substituíamos idénticos por idénticos *respecto a la referencia habitual* para obtener (9). Pero, como la referencia de la subordinada en estos contextos es el sentido habitual y «las órbitas planetarias son círculos» y «la Luna esta hecha de queso verde» tienen sentidos distintos, sucede que *simplemente no estabamos substituyendo idénticos por idénticos*. Si hubiéramos substituido la subordinada de (8) por otra con idéntico sentido, la referencia del todo no se hubiera alterado. Por tanto, el principio de substitutividad seguiría valiendo con toda generalidad. Esto no quiere decir que en estos casos, y en otros similares, no vale generalmente la distinción entre sentido y referencia. Dado que el sentido es lo que me marca la ruta del referente y aquí la referencia de la subordinada es su sentido habitual, el sentido de la subordinada será simplemente lo que me marque la ruta de la referencia, esto es: será «el sentido de las palabras "el sentido de que..."». Esta ingeniosa solución tiene sin embargo un precio. Los valores de verdad son entidades extensionales, pertenecen al reino de la referencia y, por tanto, sus criterios de identidad pueden establecerse fácilmente. No sucede lo mismo con los sentidos; no es asunto fácil determinar cuándo dos sentidos son idénticos. La búsqueda de criterios de identidad para sentidos lo mismo que el rechazo de éstos como entidades no respetables (puesto que no parece que sea posible encontrar criterios de identidad aceptables para ellos) ha sido constante en las discusiones de filosofía del lenguaje contemporánea. No es exagerado pues decir que este artículo ha establecido la agenda de la semántica filosófica en nuestro siglo.

INVESTIGACIONES LÓGICAS

Una parte muy importante de la obra de Frege relacionada con la filosofía del lenguaje y de la lógica estuvo motivada por su rechazo a la importación de conceptos psicológicos en lógica y por el deseo de «impedir que se borrase la frontera entre la lógica y la psicología». Aunque las bases para la crítica al psicologismo fueron establecidas por Frege en *Grundlagen* —«separar siempre lo psicológico de lo lógico, lo subjetivo de lo objetivo»— la primera de las «Investigaciones lógicas» se ocupa de manera especial de «lo lógico» por contraposición a «lo psicológico», de «lo objetivo» por contraposición a «lo subjetivo». Pero ¿qué entiende Frege por «objetivo»?

Lo objetivo es, en principio, aquello que es independiente de mi conciencia, aquello que no pertenece a mi experiencia interna y de lo que otros, al igual que yo, pueden ser conscientes. La mesa en la que me apoyo para escribir, los lomos de los libros que puedo ver si alzo la vista, son objetivos porque cualquier otra persona en mi misma situación podría contemplarlos. Pero el mundo de lo objetivo no se termina para Frege en aquellas cosas que puedo percibir por los sentidos —lo objetivo *real*— sino que se extiende también a todo aquello —no necesariamente perceptible por los sentidos— que puede ser contenido de conciencia de muchos y que es independiente de las ideas y sensaciones privadas de cada uno: lo objetivo *no real*.

Es justamente en «El pensamiento» donde Frege explica las características de lo objetivo *no real*[40] mediante su famosa distinción entre los tres reinos: el reino de los objetos o cosas perceptibles por los sentidos, el reino del mundo interior, compuesto de impresiones sensoriales, ideas, representaciones, o comoquiera que denominemos a sus habitantes, y el mundo de lo objetivo *no real*:

> Debe admitirse un tercer reino. Lo que pertenece a él coincide con las representaciones en que no puede ser percibido por los sentidos, pero con las cosas en que no necesita portador a cuyos contenidos de conciencia pertenezca. Así, por ejemplo, el pensamiento que expresamos con el teorema de Pitágoras es atemporalmente verdadero, verdadero independientemente de que alguien lo tome como verdadero[41].

---

[40] Véase «El pensamiento». pp. 196-225 de este volumen.
[41] Ibíd., p. 212-213.

A este reino pertenecen los pensamientos. Un pensamiento no es una idea, aunque se asemeje a ella por el hecho de que no puede ser percibido por los sentidos, y tampoco es una cosa del mundo exterior, aunque se asemeje a ella por el hecho de que no necesite un portador: los pensamientos son entidades que pueden captarse, poseerse y comunicarse intersubjetivamente. Ahora bien, verdad y falsedad se predican esencialmente de los pensamientos, de manera que el reino al que pertenecen los pensamientos es también el reino de la lógica. ¿Podemos entonces caracterizar a la lógica como ciencia de las leyes del pensamiento? Frege piensa que tal caracterización es inadecuada porque la expresión «leyes del pensamiento» tiende a interpretarse por analogía con «leyes de la naturaleza» y, en ese caso, harían referencia a acontecimientos mentales. Una ley del pensamiento sería, en este sentido, una ley psicológica. Pero las leyes psicológicas tratarían en este sentido de los procesos mentales de pensamiento y de las leyes psicológicas de acuerdo con las cuales tienen lugar. Serían meramente descriptivas y, desde este punto de vista, ¿cómo podríamos distinguir los pensamientos verdaderos de los falsos? La única manera en que podríamos hacerlo es conociendo las leyes de la lógica *independientemente* de los procesos psicológicos que acompañan a las inferencias.

En «El pensamiento» aparecen interesantes discusiones acerca de la verdad. Por una parte, Frege rechaza la doctrina de la verdad como correspondencia dado que produce un regreso al infinito, e introduce de nuevo una concepción de la verdad como predicado de pensamientos, si bien se trata de un predicado *sui generis* e indefinible. Es en este contexto donde Frege retoma la distinción, ya introducida en *Begriffsschrift*, entre juicio y aserción. En «El pensamiento» Frege distingue tres componentes separados en el acto del juicio:

1. La captación del pensamiento: el pensar.
2. El reconocimiento de la verdad del pensamiento: el juzgar.
3. La manifestación de ese juicio: el aseverar.

Correspondiendo a estos tres componentes, hay también tres tipos de entidades. Así al acto de pensar le corresponde un pensamiento, al acto de juzgar le corresponde un juicio de identidad del tipo «El pensamiento de que *A* es verdadero», y al acto de aseverar

le corresponde una oración que expresa el pensamiento en cuestión, aunque no es el caso de que a toda oración le corresponda —o que toda oración exprese— un pensamiento.

Frege entiende por pensamiento «algo para lo cual la verdad puede entrar en consideración. [...]. Así puedo decir: el pensamiento es el sentido de una oración sin querer aseverar con esto que el sentido de toda oración sea un pensamiento.» Ese «algo» es imperceptible por los sentidos; tenemos con ello una relación de aprehensión —los pensamientos se captan— y captar un pensamiento no es otra cosa que realizar la actividad de pensar. Esta actividad —que debe distinguirse del intuir que está relacionado muy estrechamente con la imaginación y la percepción— es esencialmente *interna*. En este sentido se distingue, por ejemplo, del calcular. Mientras que para la actividad de calcular no es esencial el que las manipulaciones de símbolos se lleven a cabo sobre papel o mentalmente, la actividad de pensar no puede llevarse a cabo externamente; sólo puede *expresarse* externamente, pero la expresión del pensar no puede reemplazar a la actividad misma.

Captar un pensamiento es entonces captar el sentido de algún tipo de oración. No obstante, el sentido, como Dummett[42] ha señalado, no puede identificarse con el significado de la oración que expresaría ese pensamiento. En su versión final de la teoría del juicio, Frege distinguió entre el sentido que expresa una oración, su «tono» (*Beleuchtung, Färbung*) y su fuerza (*Kraft*). Al sentido de una oración pertenece sólo aquello que es relevante para su verdad o falsedad y el tono, a pesar de ser uno de los ingredientes del significado, no lo es del sentido. El que usemos la palabra «caballo», «corcel», «rocín» o «jamelgo» no introduce diferencia alguna en el pensamiento. Tampoco modifican el pensamiento expresado por una oración las locuciones que intentan influir sobre los sentimientos de los oyentes, las expresiones metafóricas, el énfasis, la entonación, las diferencias del tono de voz o la distinta «coloración» de las conectivas: la palabra «pero» se diferencia de la palabra «y» en que con ella se sugiere que lo que le sigue está en oposición con lo que, de acuerdo con lo precedente, se esperaba. Pero tal diferencia, afirma Frege, no es relevante para la verdad o falsedad del pensamiento expresado.

---

[42] M. Dummett; *Frege*, Duckworth, Londres, 1973, cap. 1, pp. 1-7.

La doctrina de la fuerza es un componente clave en la explicación del significado de Frege. Si explicásemos el funcionamiento del lenguaje meramente en términos de sentido y referencia lo único que podríamos decir es que, al emitir una oración cuyas partes poseen todas ellas referencia, lo que estamos haciendo es asignarla por medio del pensamiento que expresa a una de estas dos clases: la clase de las oraciones verdaderas o la clase de las oraciones falsas. Ahora bien, hacer esto equivaldría a renunciar a entender nuestra práctica lingüística efectiva. Pues, si digo en un contexto normal de uso «Alejandro era macedonio», no estoy meramente asignando esta oración a la clase de las oraciones verdaderas; *estoy diciendo que es verdadera.* Pero cuando digo «Si Alejandro era macedonio, entonces Aristóteles escribió las *Categorías*» también estoy asignándola a la clase de las oraciones verdaderas, aunque *no* diga que es verdadera. En consecuencia, se requiere un elemento como la fuerza si queremos dar cuenta adecuadamente de la práctica lingüística de los hablantes.

La doctrina de la fuerza está estrechamente vinculada con la teoría fregeana del juicio. Captar un pensamiento debe distinguirse cuidadosamente de juzgar que ese pensamiento es verdadero. Podemos darnos cuenta de esto considerando el caso de las oraciones interrogativas del tipo sí/no. «En una pregunta —afirma Frege— puede distinguirse entre la petición de juzgar y el contenido particular de la pregunta sobre el que ha de juzgarse.» Cuando utilizamos una oración de este tipo no hemos juzgado sobre su verdad —solicitamos que se juzgue— pero *proponemos* un sentido, un pensamiento, con fuerza interrogativa, respecto del cual pedimos que se tome una decisión. Mi interlocutor debe captar aquello sobre lo que le pide que juzgue, y eso sólo puede ser un pensamiento, entidad a la que se adscribe primariamente la verdad o la falsedad. Es la respuesta a la pregunta la que constituye una aserción basada en un juicio, tanto si se responde afirmativa como negativamente. Nótese que esto significa que el ser de un pensamiento no puede consistir en su ser verdadero. En el caso de las oraciones interrogativas, si su sentido fuera un pensamiento cuyo ser consistiese en su verdad, yo reconocería con ello al mismo tiempo que su sentido era verdadero. La captación del sentido sería al mismo tiempo un acto de juzgar y la emisión de la oración interrogativa sería al mismo tiempo una aserción, por lo

tanto la respuesta a la pregunta[43]. La conclusión es obviamente absurda.

Tampoco el sujeto que juzga establece mediante su acto de juzgar la conexión y el orden entre las partes del pensamiento dando de esta manera origen al mismo. El acto de juzgar no crea ni pone en orden nada (como tampoco crea nada el acto de captar un pensamiento). Asociado con este error aparece de modo natural el siguiente: si puedo crear el pensamiento mediante el acto de juzgar, también puedo destruirlo. ¿Cómo? Negándolo, pues, si juzgar es establecer el orden y la conexión en un pensamiento, negar parece ser lo opuesto de juzgar y, así como mediante esto último se crea, mediante lo primero se rompe la conexión establecida.

Esta concepción que Frege considera errónea tiene su origen en determinadas posiciones sobre la predicación. Oraciones como «Alejandro era macedonio» se entendían tradicionalmente como construidas en virtud de la unión de sujeto y predicado mediante la cópula. La construcción de la oración en esos términos da lugar a una aserción. Pero esta explicación presenta ciertas dificultades a la hora de dar cuenta de las oraciones negativas. En efecto, la oración «Alejandro no era macedonio» tendría una estructura lógica distinta de la afirmativa: en ella *separo* sujeto y predicado para dar lugar a una oración mediante la cual se realiza la acción opuesta a aseverar. Así pues, estas dos oraciones, dado que tendrían una estructura lógica distinta, darían lugar a dos actos de juicio diferentes.

El punto de vista de Frege es totalmente distinto. En primer lugar, la negación es una *función de pensamientos*, es decir: requiere ser completada por un pensamiento. En tanto que tal es un componente del sentido de una oración —del pensamiento que expresa— y no es parte ni de la oración ni del acto de juzgar. El acto de juzgar es un acto psíquico y como tal necesita un portador; pero la negación, como parte que es de un pensamiento, no necesita portador, no es parte de la conciencia de nadie. En consecuencia, la negación no afecta para nada al acto del juicio: se trata de uno y el mismo acto ya sea la oración afirmativa o negativa. Aseveramos tanto las oraciones positivas como las negativas; decir «Alejandro no era macedonio» no es realizar el acto contrario al de aseverar, sino aseverar una oración negativa.

---

[43] Ver «La negación», pp. 226-247 de este volumen.

Las oraciones asertóricas son entonces el término de un proceso que comienza con la captación de un pensamiento, continúa con el juicio y termina con la aserción. Frege consideró la aserción como un acto de habla, algo que se *hacía* con algunos contenidos (cuya verdad se reconocía). Y esto explica por qué, de acuerdo con Frege, si A es un pensamiento falso, no puedo aseverar A. Si yo asevero A, el pensamiento de que A expresaría mi reconocimiento de la verdad de A, mientras que, si A es falso, mi aserción habría de ser no-A.

En cualquier caso, Frege mantuvo que en el caso de las oraciones declarativas y en el de las preguntas que admiten respuestas del tipo sí/no era posible que uno y el mismo pensamiento apareciese unas veces aseverado y otras no. Podría pensarse entonces que las órdenes, ruegos, deseos, etc., se diferenciaban sólo en la fuerza y no en el sentido. Podría aseverar que A es verdadero, ordenar que A sea verdadero, desear que A sea verdadero..., y así sucesivamente. Presumiblemente podríamos hacer varias cosas al expresar el mismo pensamiento. Sin embargo, Frege no generalizó su posición a todo tipo de oraciones; de hecho pensaba que la diferencia entre las oraciones declarativas y las interrogativas que admiten respuestas del tipo sí/no y los demás tipos de oraciones no reside en la fuerza, sino en el sentido. Frege, por ejemplo, no niega que una oración imperativa tenga sentido, lo que niega es que ese sentido sea un pensamiento. De este modo las oraciones interrogativas expresarían preguntas, las imperativas órdenes, las optativas deseos, etc.

Las razones de la no generalización de sus puntos de vista deben buscarse, creo, en el hecho de que Frege no logró desembarazarse nunca de los actos mentales como correlatos del acto de habla de aseverar. Para Frege, la aserción era la manifestación externa de una acto psíquico interno: el acto de juzgar que un pensamiento es verdadero. Esto explica, por ejemplo, que comparase las aserciones de un actor en el escenario con el caso de una oración a la que le falta el signo de aserción porque no se ha realizado el acto del juicio. Si una aserción es la manifestación externa de un juicio respecto de la verdad de un pensamiento, una orden es una manifestación externa de mi deseo de alguien haga algo, y un ruego es una manifestación externa de mi deseo de que alguien haga algo, etc. Esto impide que en estos casos puedan separarse contenidos comunes con fuerzas distintas: una orden y un pensa-

miento son, por definición, géneros diferentes de contenidos. Esta generalización sólo la logró Austin al reconocer que se podía dar cuenta de los diferentes actos de habla independientemente de asentimientos y sinceridades.

Con todo, Frege realizó un impagable servicio a la filosofía: presentar, como afirma Kenny[44], de manera condensada —y con una candidez extraordinaria— todo el veneno cartesiano que impregnaba muchos de los sistemas filosóficos del pasado. La escena estaba preparada para que Wittgenstein culminase la labor.

LA VERSIÓN CASTELLANA

Al realizar la presente versión castellana he consultado las distintas versiones, tanto en castellano como en inglés, que cito a continuación. He confeccionado también un glosario donde recojo los términos clave alemanes con sus equivalencias castellanas. Dentro de los diferentes textos traducidos he incluido en el margen izquierdo el número correspondiente a la paginación original del escrito. En su caso, la barra indica el lugar donde cambia la página original; a falta de barra, la página original empieza precisamente con ese párrafo.

A) Traducciones castellanas

FREGE, Gottlob (1974): *Escritos lógico-semánticos*, traducción de Carlos R. Luis y Carlos Pereda, Tecnos, Madrid.
— (1996): *Escritos filosóficos*, traducción de Ulises Moulines y Andrés Rivadulla, Crítica, Barcelona.

B) Traducciones inglesas

FREGE, Gottlob (1950): *The Foundations of Arithmetic. A logico-mathematical inquiry into the concept of number*, traducción de J. L. Austin, Basil Blackwell, Oxford.

---

44 Kenny, *op. cit.*, p. 212.

— (1952): *Translations from the Philosophical Writings of Gottlob Frege*, editado y traducido por Peter Geach y Max Black, Basil Blackwell, Oxford.
— (1977): *Logical investigations*, traducción de P. Geach y R. H. Stoothoff, Blackwell, Oxford.
— (1979): *Posthumous Writings*, editado por Hans Hermes, Friedrich Kambartel y Fredrich Kaulbach, traducido por Peter Long y Roger White, Blackwell, Oxford.
— (1979): *Philosophical and Mathematical Correspondence*, edición de Brian McGuiness, traducción de Hans Kaal, Blackwell, Oxford.
— (1984), *Collected Papers on Mathematics, Logic and Philosophy*, editado por B. McGuiness, traducido por Max Black, V. H. Dudman, Peter Geach, Hans Kaal, E-.H. W. Kluge, Brian McGuiness y R. H. Stoothoff, Blackwell, Oxford.
— (1997): *The Frege Reader*, editado por Michael Beaney, Blackwell, Oxford.

GLOSARIO

Aneianderfügen	conectar
Anzhal	Número (cardinal) (siguiendo el uso de Austin en su traducción de *Grundlagen*).
Art	*género*
Aufbau	estructura (algunas veces: construcción)
Aussagen	enunciar
aussprechen	emitir
Bau	estructura
Begriff	concepto
begriffliche Inhalt	contenido conceptual
behaupten	aseverar
behauptende Kraft	fuerza asertórica
Behauptungssatz	oración asertórica
Berechtigung	justificación
Bestandteil	parte integrante
betrachten, Betrachtung	contemplar, contemplación, consideración
beurteilen	dictaminar (algunas veces: juzgar)
Bezeichnung	designación (algunas veces: término)
Bild	figura
Dichtung	ficción poesía
Eigenschaft	propiedad
Eigenschaftwort	palabra para propiedad
eigentlicher Satz	oración propiamente dicha
einheitlicher Satz	oración unitaria
Einzelname	nombre singular
Einzigartig	*sui generis* (a veces: peculiar)
Fassen	captar
Fügende, das	conectiva
Fügung	composición
Gedanke	pensamiento
Gedankengefüge	composición de pensamientos
Gegenstand	objeto
Geist	espíritu, mente
Gesetzen des Wahrseins	leyes del ser verdad
gleich	igual, idéntico
Gleichheit	identidad, ecuación
gleichzhalig	equivalente

Inhalt	contenido
Innenwelt	mundo interior
Kraft	fuerza
Merkmal	característica
Nachsatz	consecuente
Nebengedanken	pensamientos concomitantes
sättigen	saturar
Satz	oración, proposición (algunas veces: tesis)
Satzfrage	pregunta oracional
Satzgefüge	oración compuesta
Sinn	sentido
Sinneseindruck	impresión sensorial
Sinneswahrnehmung	percepción sensorial
sinnlich Eigenschaft	propiedad sensorial
sinnlosigkeit	carencia de sentido
Teilgedanke	pensamiento componente
überstimmen	corresponder
Umfang	extensión
Umwelt	entorno
ungesättigten Teile	partes insaturadas
Unsinn	sinsentido
unsinnlich	imperceptible
Urbestandteile	elementos primitivos
Vorgang	proceso
Vorstellung	representación
Wertlauf	recorrido
Widersinning	absurdo
widersprechen, widersprechende ...	contradecir, contradictorio
wirken	actuar
wirklich	real (algunas veces: actual)
zerlegen	descomponer
zusamenfügen	combinar
zusamensetzen	componer

FUNCIÓN Y CONCEPTO*

PRÓLOGO

Publico aquí por separado esta conferencia con la esperanza de que así encontrará algunos lectores para los que, en caso contrario, permanecería ignorada entre los trabajos de la Sociedad de Medicina y Ciencias Naturales de Jena. En un futuro próximo tengo la intención de exponer, como ya indiqué anteriormente, cómo expreso las definiciones fundamentales de la aritmética en mi conceptografía y cómo a partir de ellas llevo a cabo demostraciones con la única ayuda de mis signos. Para este fin, me resulta útil poder remitirme a esta conferencia, de modo que no me sea necesario meterme allí en discusiones, que quizás no fuesen del agrado de muchas personas por no concernir directamente al tema, mientras que otras, por el contrario, podrían echarlas en falta. Mi conferencia no va dirigida, como requería el lugar en que fue pronunciada, exclusivamente a matemáticos; y he tratado de servirme de un modo de expresión tan comprensible para todo el mundo como lo permitían el tiempo disponible y el objeto de mi disertación. Quizá de este modo se logre despertar cierto interés por el tema en círculos más amplios de estudiosos, especialmente también entre los lógicos.

1 Hace ya bastante tiempo[1] tuve el honor de pronunciar una conferencia en esta Sociedad sobre el sistema simbólico que he denominado conceptografía. Hoy me gustaría iluminar este asunto desde otro ángulo y comunicar algunos complementos y nuevas concepciones cuya necesidad se me ha impuesto desde entonces. No se trata de hacer aquí una ex-

* El texto que sigue, cuyo título original es «Funktion und Begriff» fue leído por Frege en la sesión del 9 de enero de 1891 de la Sociedad de Medicina y Ciencias Naturales de Jena. Posteriormente, fue publicado por el editor Hermann Pohle, también de Jena, en 1891. En él, que constituye la explicación más detallada que Frege hizo de su noción de función, se defiende que los conceptos son géneros particulares de funciones. Es también en este escrito donde se apunta por vez primera la famosa distinción entre sentido y referencia.

[1] El 10 de enero de 1879, y el 27 de enero de 1882.

posición completa de mi conceptografía, sino de poner de relieve algunas ideas fundamentales.

Mi punto de partida es lo que en matemáticas se llama función. Esta palabra no tuvo desde el principio un significado tan amplio como el que alcanzó más tarde. Será bueno empezar nuestras consideraciones por su modo de uso originario y tomar en cuenta después las extensiones posteriores. En principio, hablaré sólo de funciones de un solo argumento. Ante todo, una expresión científica aparece con su significado característico cuando éste se precisa para expresar
2 una ley. Este caso sucedió, por lo que respecta a la / función, con el descubrimiento del análisis superior, pues aquí se trató ante todo de establecer leyes que valiesen para las funciones en general. Tenemos, por tanto, que remontarnos al tiempo en el que se descubrió el análisis superior, si se quiere saber lo que en un principio se entendió en matemáticas por la palabra «función». A esta pregunta se recibe por cierto como respuesta lo siguiente: «por función de x se ha de entender una expresión de cálculo que contenga x, una fórmula que encierre la letra x». Así, por ejemplo, la expresión:

$$2 \cdot x^3 + x$$

sería una función de x;

$$2 \cdot 2^3 + 2$$

sería una función de 2. Esta respuesta no puede ser satisfactoria, porque en ella no se diferencian forma y contenido, signo y cosa designada, un error con el que ciertamente uno se encuentra muy a menudo en los escritos matemáticos, incluso de autores de renombre. Ya he señalado con anterioridad[2] las carencias de las teorías formales al uso de la aritmética. Se habla allí de signos que no tienen ningún contenido, ni deben tenerlo, aunque a continuación se les adscribe pro-

[2] *Die Grundlagen der Arithmetik*, Breslau, 1884, pp. 92 ss [versión castellana: *Los Fundamentos de la Aritmética*, Laia, Barcelona, 1972] e informes de las sesiones de la Sociedad de Medicina y Ciencias Naturales de Jena, sesión del 17 de julio.

piedades que sólo pueden pertenecer razonablemente al contenido de un signo. Aquí ocurre también lo mismo: una mera expresión, la forma de un contenido, no puede ser la
3 / esencia de la cosa; sólo puede serlo el contenido mismo.
¿Cuál es entonces el contenido, la referencia de «$2 \cdot 2^3 + 2$»? El mismo que el de «18» o el de «$3 \cdot 6$». En la ecuación «$2 \cdot 2^3 + 2 = 18$, se expresa que la referencia de la ristra de signos que está a la derecha es la misma que la de la que está a la izquierda. Tengo que hacer frente aquí al punto de vista de que, 2 + 5 y 3 + 4, por ejemplo, son ciertamente iguales, aunque no sean lo mismo. Esta opinión se basa nuevamente en la confusión entre forma y contenido, entre signo y cosa designada. Es como si uno quisiese considerar como distintas la violeta olorosa y la *viola odorata* porque los nombres de ambas suenan distintos. La diferencia en la designación no puede bastar ella sola para fundamentar una diferencia en las cosas designadas. La única razón por la que en nuestro caso la cuestión es menos transparente es que la referencia del signo numérico 7 no es sensiblemente perceptible. La tendencia tan extendida actualmente de no reconocer como objeto nada que no pueda ser percibido por los sentidos, induce aquí a tomar los signos numéricos mismos por los números, por los genuinos objetos de estudio[3]; y entonces sí, ciertamente 7 y 2 + 5 serían distintos. Pero tal concepción no se puede mantener, pues no / se puede hablar de cualesquie-
4 ra propiedades aritméticas de los números sin remontarnos a
la referencia de los signos numéricos. La propiedad del 1, a saber: que multiplicado por sí mismo da de nuevo como resultado a sí mismo, sería pura ficción; ninguna investigación microscópica o química, por muy profunda que fuese, podría jamás descubrir esa propiedad en la inocente figura que llamamos signo numérico 1. Quizás se está hablando de una definición; pero no hay ninguna definición que sea creadora

[3] Cf. los artículos «Zählen und Messen erkenntnistheoretish betrachtet» [«Contar y medir considerados desde el punto de vista de la teoría del conocimiento»] de H. v. Helmholtz y «Über den Zahlbegriff [«Sobre el concepto de número»] de Lopold Kronecher (*Philosophische Aufsattze. Eduard Zeller zu Seinen fünfzigjährigen Doctorjubiläum gewidmet* [Ensayos filosóficos. Dedicados a Eduard Zeller en el cincuenta aniversario de su doctorado], Leipzig, 1887).

en el sentido de ser capaz de dotar a una cosa de propiedades que no tenga de antemano, si exceptuamos ésta: la de expresar y designar aquello de lo que, en virtud de la definición, es un signo[4]. Las figuras que llamamos signos numéricos tienen, por el contrario, propiedades físicas y químicas que dependen del medio que utilizamos para escribirlos. Se podría pensar que algún día se introdujesen signos numéricos completamente nuevos como, por ejemplo, los caracteres arábigos suplantaron a los romanos. Nadie supondría seriamente que, de este modo, tendríamos números completamente nuevos, objetos de la aritmética completamente nuevos con propiedades no investigadas hasta ese momento. De este modo, si se debe distinguir los signos numéricos de sus referencias, hemos de reconocer también la misma referen-
5 cia / a las expresiones «2», «1 + 1», «3 – 1», «6 : 3», ya que no se alcanza a ver en qué podría consistir la diferencia. Quizás se diga: 1 + 1 es una suma, pero 6 : 3 es un cociente. Pero ¿qué es 6 : 3? El número que multiplicado por 3 da como resultado 6. Se dice «el número», no «un número»; se indica con el artículo determinado que hay solamente uno. Ahora bien,

$$(1 + 1) + (1 + 1) + (1 + 1) = 6,$$

y, por consiguiente, (1 + 1) es justamente el número que se designó como (6 : 3). Las diferentes expresiones corresponden a diferentes concepciones y aspectos, pero no obstante siempre a la misma cosa. Si no fuese así, la ecuación $x^2 = 4$ no tendría solamente las dos raíces 2 y –2, sino también (1 + 1) e innumerables otras que serían diferentes entre sí, aunque similares bajo cierto aspecto. En la medida en que se reconocen sólo dos raíces reales, se rechaza el punto de vista de que el signo de igualdad no significa coincidencia completa alguna, sino sólo concordancia parcial. Ateniéndonos a esto, vemos que las expresiones

[4] A este respecto, se trata siempre de asociar con un signo un sentido o una referencia. Allí donde faltan por completo el sentido y la referencia, no se puede hablar genuinamente ni de un signo ni de una definición.

«$2 \cdot 1^3 + 1$»,

«$2 \cdot 2^3 + 2$»

y

«$2 \cdot 4^3 + 4$»

tienen como referencia números, a saber: 3, 18, 132. Así pues, si la función sólo fuese realmente la referencia de una expresión de cálculo, entonces sería pura y simplemente un número; en ese caso no habríamos ganado nada nuevo para la aritmética. Por cierto, se acostumbra a pensar, a propósito
6 de la palabra «función», en expresiones / en las que se indica un número sólo de manera indeterminada por medio de la letra x, como, por ejemplo,

«$2 \cdot x^3 + x$»;

pero con esto no ha cambiado nada, ya que esta expresión indica también un número sólo de manera indeterminada y el que se escriba tal número o solamente «x» no da lugar a ninguna diferencia esencial.

Sin embargo, es justamente la notación consistente en escribir la «x», que indica de manera indeterminada, la que nos lleva a la concepción correcta. Se llama a x el argumento de la función y en

«$2 \cdot 1^3 + 1$»,

«$2 \cdot 4^3 + 4$»

y

«$2 \cdot 5^3 + 5$»

se reconoce una y otra vez la misma función, sólo que con diferentes argumentos, a saber: 1, 4 y 5. Puede colegirse de esto que lo común a cada expresión es aquello en lo que reside la esencia genuina de la función, esto es: lo que está presente en

$$«2 \cdot x^3 + x»$$

dejando de lado la x; y esto podríamos escribirlo más o menos así:

$$«2 \cdot (\ )^3 + (\ )».$$

Me interesa mostrar que el argumento no pertenece a la función, sino que forma junto con la función un todo completo; pues a la función, por sí sola, hay que llamarla incompleta, necesitada de compleción o insaturada. Y de este modo se diferencian de modo fundamental las funciones de los números. Teniendo en cuenta esta esencia de la función
7 se explica / que, por un lado, reconozcamos en «$2 \cdot 1^3 + 1$» y «$2 \cdot 2^3 + 2$» la misma función, aunque estas expresiones se refieran a números distintos, mientras que, por otro, no encontramos la misma función en «$2 \cdot 1^3 + 1$» y «$4 - 1$» a pesar de su mismo valor numérico. Además, vemos ahora cuán fácilmente nos sentimos tentados a ver lo esencial de la función pura y simplemente en la forma de expresión. Reconocemos la función en su expresión al imaginar descompuesta esta última; y tal posible descomposición nos viene sugerida por la forma de la expresión.

Las dos partes en las que se descompone una expresión de cálculo, el signo del argumento y la expresión de la función, no son homogéneas; ciertamente el argumento es un número, un todo completo en sí mismo, mientras que la función no lo es. Se puede comparar esto con la división de una línea por un punto. Uno esta inclinado en este caso a asignar el punto de división a ambos segmentos de la línea. Pero si la división quiere llevarse a cabo con rigor, esto es: sin que nada se cuente doblemente ni se deje fuera nada, se tiene que asignar el punto a uno solo de los segmentos. Este segmento estará entonces totalmente completo en sí mismo y se puede comparar con el argumento, mientras que al otro le falta algo. Pues el punto de división, es decir, lo que se podría llamar su punto final, no le pertenece. Sólo si se lo completa con este punto final, o con una línea con dos puntos finales, se obtiene de él algo completo. Si digo, por ejemplo,
8 «la función $2\,x^3 + x$», x no / ha de considerarse en este caso

como algo que pertenece a la función, sino que esta letra sólo sirve para indicar el género de compleción que se necesita, en la medida en que da a conocer los lugares en los que debe entrar el signo del argumento.

Ahora bien, llamamos al resultado de completar la función con su argumento, el valor de la función para ese argumento. Así, por ejemplo, 3 es el valor de la función $2 \cdot x^2 + x$ para el argumento 1, puesto que tenemos que $2 \cdot 1^2 + 1 = 3$.

Hay funciones como, por ejemplo, $2 + x - x$ o $2 + 0 \cdot x$ cuyo valor es siempre el mismo sea cual sea su argumento; tenemos $2 = 2 + x - x$ y $2 = 2 + 0 \cdot x$. Ahora bien, si considerásemos que el argumento pertenece a la función, tendríamos que mantener que esta función es el número 2. Pero esto es incorrecto. Aunque aquí el valor de la función es siempre 2, la función misma debe distinguirse sin embargo de 2; la expresión de una función tiene que mostrar siempre uno o más lugares cuyo destino es el ser rellenados por el signo del argumento.

El método de la geometría analítica nos brinda un medio de hacer intuitivos los valores de una función para diferentes argumentos. Ciertamente, si consideramos el argumento como valor numérico de una abscisa, y el correspondiente valor de la función como valor numérico de la ordenada de un punto, obtenemos una totalidad de puntos que, en los casos ordinarios, se representa intuitivamente como una curva. Cada punto de la curva se corresponde con un argumento junto con el correspondiente valor de la función.

9 Así, por ejemplo,

$$y = x^2 - 4x$$

nos da una parábola, donde «y» indica el valor de la función y el valor numérico de la ordenada, del mismo modo que «x» indica el argumento y el valor numérico de la abscisa. Comparándola ahora con la función

$$x(x - 4),$$

encontramos que en todos los casos tiene, para el mismo argumento, el mismo valor que aquélla. Tenemos, en general,

$$x^2 - 4x = x(x - 4),$$

sea cual sea el número que se tome para x. Por consiguiente, la curva que obtenemos a partir de

$$y = x^2 - 4x$$

es la misma que la que surge de

$$y = x(x - 4).$$

Expreso esto de la manera siguiente: la función $x(x - 4)$ tiene el mismo recorrido que la función $x^2 - 4x$.

Si escribimos

$$x^2 - 4x = x(x - 4),$$

no equiparamos una función a la otra, sino sólo los valores de las funciones entre sí. Y, si entendemos que esta ecuación debe valer cualquiera que sea el argumento que se ponga en lugar de x, entonces hemos expresado con esto la generalidad de una ecuación. Podríamos también decir: «El recorrido
10 do de la función $x(x - 4)$ es igual al de / la función $x^2 - 4x$ y con esto tendríamos una igualdad entre recorridos. Ahora bien, el que sea posible concebir la generalidad de una igualdad entre valores de función como una igualdad, esto es: como una igualdad entre recorridos, es algo que, me parece, no ha de probarse, sino que debe considerase como una ley lógica fundamental[5].

Por tanto, podríamos introducir además una notación abreviada para el recorrido de una función. Con este fin, reemplazo el signo del argumento en la expresión de la función por una vocal griega, encierro el todo entre paréntesis y le antepongo la misma letra griega con espíritu suave. De acuerdo con esto,

[5] En muchos usos del modo habitual de expresión matemática, la palabra «función» corresponde ciertamente a lo que he llamado aquí recorrido de una función. Pero función, en el sentido de la palabra que se usa aquí, es lo lógicamente anterior.

$$ἐ(\varepsilon^2 - 4\varepsilon)$$

es, por ejemplo, el recorrido de la función $x^2 - 4x$, y

$$ἀ(\alpha.(\alpha - 4)$$

es el recorrido de la función $x(x - 4)$; de este modo, en

$$«ἐ(\varepsilon^2 - 4\varepsilon) = ἀ(\alpha.(\alpha - 4))»$$

tenemos la expresión de que el primer recorrido es igual que el segundo. Se eligen letras griegas distintas con toda la intención para indicar que nada nos obliga a escoger las mismas.

11 $$«x^2 - 4x = x(x - 4)»$$

expresa por cierto el mismo sentido, si lo entendemos como más arriba, pero de una manera diferente. Presenta el sentido como la generalización de una igualdad, mientras que la expresión que acabamos de introducir es simplemente una ecuación cuyo lado derecho tiene en sí mismo, igual que el izquierdo, una referencia completa. En

$$«x^2 - 4x = x(x - 4)»,$$

el lado izquierdo, considerado aisladamente, indica sólo de manera indeterminada un número, y lo mismo sucede en el lado derecho. Si tuviésemos meramente «$x^2 - 4x$», podríamos escribir en su lugar «$y^2 - 4y$» sin alterar el sentido; pues «y» indica, como «x», sólo de manera indeterminada, un número. Pero, si unimos ambos lados en una ecuación, tenemos que elegir la misma letra en ambos lados y de este modo expresamos algo que no contiene el lado izquierdo por sí mismo, ni tampoco el lado derecho, ni el signo de igualdad, es decir: la generalización, para ser precisos; se trata, desde luego, de la generalización de una ecuación; pero es, antes que nada, una generalización.

Del mismo modo que se indica un número de manera in-

determinada por medio de una letra, para expresar generalización se necesita indicar de manera indeterminada una función por medio de letras. Para esto uno se sirve, en la mayoría de los casos, de las letras f y F de modo que en «$f(x)$» y «$F(x)$», x está por el argumento. Aquí la necesidad de compleción de la función se expresa por el hecho de que la letra f
12 o F lleve a continuación un paréntesis / cuyo espacio interior está destinado a acoger el signo del argumento. De este modo,

«ἐf(ε)»

indica el recorrido de una función que se deja indeterminada. Ahora bien, ¿cómo se extendió la referencia de la palabra función con el progreso de la ciencia? A este respecto, pueden distinguirse dos direcciones.

En primer lugar, se extendió el círculo de los géneros de cálculo que contribuyen a la construcción de una función. A la adición, multiplicación, potenciación y sus inversas se añadieron distintos géneros de traspaso de límite sin que, por otra parte, se tuviera siempre una conciencia clara de lo que tenía de esencialmente nuevo lo que así se admitía. Se fue cada vez más lejos e incluso se necesitó recurrir al lenguaje hablado, puesto que el lenguaje simbólico del análisis fallaba cuando, por ejemplo, se hablaba de una función en que el valor para argumentos racionales era 1 y para irracionales 0.

En segundo lugar, se extendió el círculo de lo que puede hacer el papel de argumento y valor de la función, mediante la admisión de números complejos. Con esto, hubo al mismo tiempo que determinar adicionalmente el sentido de las expresiones «suma», «producto», etc.

Sigo ahora adelante en ambas direcciones. Por de pronto, añado a los signos +, –, etc., que sirven para formar una
13 expresión de función, / signos como =, >, <, de tal manera que pueda hablar, por ejemplo, de la función $x^2 = 1$, donde x, como anteriormente, está por el argumento. La primera cuestión que surge aquí es la de cuáles son los valores de esta función para diferentes argumentos. Si reemplazamos sucesivamente x por -1, 0, 1, 2, obtenemos

$$(-1)^2 = 1$$
$$0^2 = 1$$
$$1^2 = 1$$
$$2^2 = 1.$$

De estas ecuaciones, la primera y la tercera son verdaderas; las restantes, falsas. Digo entonces: «el valor de nuestra función es un valor de verdad» y distingo entre el valor de verdad de lo verdadero y el de lo falso. Para abreviar, llamo a uno lo verdadero y al otro lo falso. De acuerdo con esto, «$2^2 = 4$» se refiere a lo verdadero, del mismo modo que, pongamos por caso, «2^2» se refiere a 4. Y «$2^2 = 1$» se refiere a lo falso. De acuerdo con esto,

$$«2^2 = 4», «2 > 1», «2^4 = 4^2»$$

se refieren a lo mismo, esto es, a lo verdadero, de modo que en

$$(2^2 = 4) = (2 > 1)$$

tenemos una ecuación correcta.

Inmediatamente, surge aquí la objeción de que «$2^2 = 4$» y «$2 > 1$» enuncian cosas completamente distintas, expresan pensamientos completamente distintos; pero también «$2^4 = 4^2$» y «$4 \cdot 4 = 4^2$» expresan pensamientos distintos y, con todo, se puede reemplazar «2^4» por «$4 \cdot 4$», puesto que ambos signos tienen la misma referencia. Por consiguiente, «$2^4 = 4^2$» y
14 «$4 \cdot 4 = 4^2$» tienen la misma referencia. Se ve / a partir de esto que la igualdad de referencia no tiene como consecuencia la igualdad de pensamiento. Cuando decimos «El lucero de la tarde es un planeta cuyo período de rotación es menor que el de la tierra», hemos expresado un pensamiento distinto del que se expresa en la oración «El lucero de la mañana es un planeta cuyo período de rotación es menor que el de la tierra», pues el que no sabe que el lucero de la mañana es el lucero de la tarde podría tener la una por verdadera y la otra por falsa; sin embargo la referencia de ambas oraciones tiene que ser la misma, pues sólo se han intercambiado las palabras «lucero de la tarde» y «lucero de la mañana» que tie-

nen la misma referencia, esto es: son nombres propios del mismo cuerpo celeste. Ha de distinguirse sentido y referencia. «2^4» y «$4 \cdot 4$» tienen ciertamente la misma referencia, es decir: son nombres propios del mismo número, pero no tienen el mismo sentido; en consecuencia «$2^4 = 4^2$» y «$4 \cdot 4 = 4^2$» tienen ciertamente la misma referencia, pero no el mismo sentido; esto quiere decir, en este caso, lo siguiente: no contienen el mismo pensamiento[6].

Así, con el mismo derecho con el que escribimos

$$«2^4 = 4 \cdot 4»$$

podemos también escribir

$$«(2^4 = 4^2) = (4 \cdot 4 = 4^2)»$$

y

$$«(2^2 = 4) = (2 > 1)».$$

15 Podría además preguntarse con qué finalidad se admitieron los signos =, >, <, en el círculo de los que ayudan a formar una expresión de función. En la actualidad parece cada vez ganar adeptos la opinión de que la aritmética es una lógica más desarrollada, que una fundamentación más rigurosa de las leyes aritméticas las reduce a puras leyes lógicas y sólo a ellas. Yo comparto también esa opinión y fundamento en ella la exigencia de que el lenguaje simbólico de la aritmética debe ampliarse a uno lógico. A continuación se indicará cómo sucede esto en nuestro caso.

Vimos que el valor de nuestra función $x^2 = 1$ es siempre uno de los dos valores de verdad. Ahora bien, cuando para un determinado argumento, por ejemplo -1, el valor de la función es lo verdadero, podremos expresarlo así: «El nú-

---

[6] No se me oculta que este uso puede parecer, a primera vista, arbitrario y artificial, y que se podría reclamar una fundamentación más minuciosa. Cf. mi artículo de próxima aparición «Über Sinn un Bedeutung» [«Sobre sentido y referencia»], en *Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik* [pp. 84-111 de este volumen].

mero −1 tiene la propiedad de que su cuadrado es 1», o, para abreviar, «−1 es la raíz cuadrada de 1», o «−1 cae bajo el concepto raíz cuadrada de 1». Cuando el valor de la función $x^2 = 1$ es lo falso para un argumento, por ejemplo, 2, podremos expresarlo así: «2 no es la raíz cuadrada de 1» o «2 no cae bajo el concepto raíz cuadrada de 1». Con esto vemos cuán estrecha es la conexión entre lo que se llama concepto en lógica y lo que nosotros llamamos función. De hecho, se puede decir directamente: un concepto es una función cuyo valor es siempre un valor de verdad. También, el valor de la función

$$(x + 1)^2 = 2(x + 1)$$

16 es siempre un valor de verdad. Obtenemos lo verdadero para, por ejemplo, el argumento −1, y podremos también expresar esto así: −1 es un número que es menor en 1 que un número cuyo cuadrado es igual a su doble. Con esto se ha expresado el que −1 cae bajo un concepto. Ahora bien, las funciones

$$x^2 = 1 \text{ y } (x + 1)^2 = 2(x + 1)$$

tienen siempre el mismo valor para el mismo argumento, es decir: lo verdadero para −1 y +1, lo falso para todos los demás argumentos. Diremos también, de acuerdo con lo establecido anteriormente, que esas funciones tienen el mismo recorrido y expresamos esto en signos de la manera siguiente:

$$\grave{\varepsilon}(\varepsilon^2 = 1) = \grave{\alpha}((\alpha + 1)^2 = 2(\alpha + 1)).$$

En lógica se llama a esto identidad de la extensión de los conceptos. Por consiguiente, podemos designar como extensión de un concepto al recorrido de una función cuyo valor para todo argumento es un valor de verdad.

No nos detendremos en las ecuaciones e inecuaciones (*Ungleichungen*). La forma lingüística de las ecuaciones es una oración asertórica. Tal oración contiene como sentido un pensamiento —o, por lo menos, pretende contenerlo—; y

este pensamiento es, en general, verdadero o falso, esto es: tiene, en general, un valor de verdad que debe considerarse como la referencia de la oración, del mismo modo que, pongamos por caso, el número 4 es la referencia de la expresión «2 + 2», o del mismo modo que Londres es la referencia de la expresión «la capital de Inglaterra».

17 A las oraciones asertóricas en general, lo mismo que a las ecuaciones o a las inecuaciones o a las expresiones analíticas, se las puede pensar descompuestas en dos partes, de las cuales una es completa en sí misma, la otra necesita compleción, es insaturada. Así, por ejemplo, la oración

«César conquistó las Galias»

puede descomponerse en «César» y «conquistó las Galias». La segunda parte es insaturada, lleva consigo un lugar vacío, y sólo cuando se rellena ese lugar con un nombre propio o con una expresión que está por un nombre propio, surge un sentido completo. Llamo también aquí función a la referencia de esta parte insaturada. En este caso, el argumento es César.

Vemos que aquí se ha llevado a cabo al mismo tiempo una extensión en la otra dirección, es decir: respecto de lo que puede hacer el papel de argumento. Ya no hay que admitir meramente números, sino también objetos en general, con lo cual debo ciertamente contar a las personas entre los objetos. Como posibles valores de una función se han introducido ya los dos valores de verdad. Debemos seguir adelante y admitir objetos sin restricción alguna como valores de una función. Para tener un ejemplo de esto, empecemos con, pongamos por caso, la expresión

«la capital del Imperio alemán».

Esta expresión está obviamente por un nombre propio y se refiere a un objeto. Descomponiéndola ahora en las partes

«la capital del»

18 e / «Imperio alemán», con lo cual cuento la forma del genitivo dentro de la primera parte, ésta resulta ser insaturada, mientras que la otra es completa en sí misma. Así pues, de acuerdo con lo anterior llamo a

«la capital de x»

la expresión de una función. Tomemos como su argumento el Imperio alemán; obtenemos entonces Berlín como valor de la función.

Si, de este modo, admitimos objetos sin limitación alguna como argumentos y valores de una función, cabe preguntarse ahora qué es lo que aquí se llama objeto. Tengo por imposible una definición de tipo escolar, puesto que aquí tenemos algo que, debido a su simplicidad, no admite una descomposición lógica. Sólo es posible señalar lo que se quiere decir. Aquí sólo puedo decir brevemente esto: objeto es todo lo que no es función, cuya expresión no conlleva, por lo tanto, un lugar vacío.

Una oración asertórica no contiene ningún lugar vacío y por ello hay que considerar que su referencia es un objeto. Pero esa referencia es un valor de verdad. Por consiguiente, ambos valores de verdad son objetos.

Anteriormente hemos formulado ecuaciones entre recorridos; por ejemplo,

«$\grave{\varepsilon}(\varepsilon^2 - 4\varepsilon) = \grave{\alpha}(\alpha(\alpha - 4))$».

Podemos descomponer esto en «$\grave{\varepsilon}(\varepsilon^2 - 4\varepsilon)$» y «$\grave{\alpha}(\alpha(\alpha - 4))$». Esta última parte está necesitada de compleción,
19 pues lleva consigo un lugar vacío / a la izquierda del signo de igualdad. La primera parte «$\grave{\varepsilon}(\varepsilon^2 - 4\varepsilon)$» es totalmente completa en sí misma y, por lo tanto, se refiere a un objeto. Los recorridos de funciones son objetos, mientras que las funciones mismas no lo son. Habíamos llamado también recorridos a $\grave{\varepsilon}(\varepsilon^2 - 1)$, pero también podríamos designarlo como extensión del concepto raíz cuadrada de 1. Por tanto, las extensiones de conceptos son también objetos, aunque los conceptos mismos no lo son.

Después de que hemos ampliado el ámbito de lo que

puede tomarse como argumento, tenemos que convenir estipulaciones más exactas sobre las referencias de los signos que ya se emplean. En la medida en que se consideran sólo como objetos los números enteros de la aritmética, las letras *a* y *b* en «*a* + *b*» indican sólo números enteros de manera que hay que explicar el signo de la suma sólo entre los números enteros. Cada ampliación del ámbito de los objetos, que se indican mediante «*a*» y «*b*», hace necesaria una nueva explicación del signo de la suma. Parece un precepto exigido por el rigor científico el que tomemos precauciones para que nunca una expresión pueda carecer de referencia, para que nunca, sin darnos cuenta, calculemos con signos vacíos estando convencidos de que se trata de objetos. En el pasado, ha habido malas experiencias con series infinitas divergentes. Es necesario, pues, hacer estipulaciones de las que resulte, por ejemplo, a qué se refiere

«⊙ + 1»

si «⊙» ha de referirse al Sol. El cómo se establezcan estas es-
20 tipulaciones es / relativamente indiferente; lo esencial es que se hagan, que «*a* + *b*» tenga siempre una referencia, cualesquiera que sean los signos de objetos determinados que puedan reemplazar a «*a*» y «*b*». Para los conceptos establecemos la exigencia de que, para cada argumento, han de tener como valor un valor de verdad, de que, para cada objeto, esté determinado si cae bajo un concepto o no; dicho con otras palabras: establecemos para los conceptos la exigencia de que estén nítidamente delimitados; si esto no se cumpliese, sería imposible formular para ellos leyes lógicas. Para cada argumento *x*, para el que «*x* + 1» careciese de referencia, tampoco la función «*x* + 1 = 10» tendría ningún valor y, por consiguiente, ningún valor de verdad; de este modo el concepto

«lo que incrementado en 1 da 10»

no tendría ningún límite nítido. La exigencia de delimitación nítida de los conceptos conlleva para las funciones en general el que éstas tienen que tener un valor para cada argumento.

Hasta ahora hemos considerado los valores de verdad sólo como valores de función, no como argumentos. Por lo que se acaba de decir, una función tiene que obtener también un valor cuando se toma como argumento un valor de verdad; pero, en la mayoría de los casos, por lo que respecta a los signos que ya están en uso, una estipulación a este efecto sólo se produce con el único objeto de que se produzca tal estipulación, sin que con ello se tome demasiado en consideración lo que se determina. Pero se podrían considerar ahora algunas funciones que nos resultan interesantes precisamente cuando sus argumentos son valores de verdad.

21 Introduzco como tal función

$$— x,$$

y estipulo que el valor de esa función ha de ser lo verdadero, cuando se tome como argumento lo verdadero, y que, por el contrario, en todos los demás casos, el valor de esa función es lo falso, esto es: tanto cuando el argumento es lo falso como cuando no es valor de verdad alguno. De acuerdo con esto:

$$— 1 + 3 = 4$$

es, por ejemplo, lo verdadero, mientras que tanto

$$— 1 + 3 = 5$$

como

$$— 4$$

es lo falso. Esta función tiene pues como su valor el argumento mismo, cuando éste es un valor de verdad. He denominado antes a esta barra horizontal la barra del contenido, un nombre que ya no me parece apropiado. Ahora la llamaré simplemente la horizontal.

Cuando se escribe una ecuación o una inecuación, por ejemplo $5 > 4$, ordinariamente se quiere expresar con ello al mismo tiempo un juicio; en nuestro caso, se quiere aseverar que 5 es mayor que 4. De acuerdo con la concepción que he

explicado aquí, en «5 > 4» o «1 + 3 = 5» se tienen sólo expresiones de valores de verdad, sin que con ello se asevere nada. Esta separación entre el juzgar y aquello sobre lo que se juzga, parece indispensable, pues, de lo contrario, una mera suposición, el plantear un caso, no sería expresable sin juzgar, al mismo tiempo, sobre / si ha sucedido o no. Necesi-
22 tamos pues un signo especial, para poder aseverar algo. Me sirvo para esto de una barra vertical en el extremo izquierdo de la horizontal, de modo que con

$$«\vdash\!\!— 2 + 3 = 5»$$

aseveramos: 2 + 3 es igual a 5. Por consiguiente, no se está escribiendo meramente un valor de verdad como en

$$«2 + 3 = 5»,$$

sino que, al mismo tiempo, se dice también que es lo verdadero[7].

La función siguiente más simple puede ser aquella cuyo valor es lo falso precisamente para los argumentos para los que el valor de $— x$ es lo verdadero, y cuyo valor, inversamente, es lo verdadero, para los argumentos para los que el valor de $— x$ es lo falso. La designo así

$$\top x,$$

y llamo aquí a la pequeña barra vertical la barra de la negación. Concibo esta función como una función con el argumento $— x$:

$$(\top x) = (\top (— x))$$

e imagino aquí que ambas barras horizontales se han fusionado. Pero también está

$$(— (\top x)) = (\top x),$$

[7] La barra del juicio no puede usarse para formar una expresión de función, pues no sirve, en conexión con otros signos, para designar un objeto. «⊢— 2 + 3 = 5» no designa nada, sino que asevera algo.

23 pues el valor de $-\!\!\top\!\!- x$ es siempre un valor de verdad. Concibo, por consiguiente, en «$-\!\!\top\!\!- x$» ambas partes de la barra a derecha e izquierda de la barra de la negación como horizontales en el sentido especial de la palabra que se ha explicado anteriormente. De acuerdo con esto,

$$\text{«}—\, 2^2 = 5\text{»},$$

por ejemplo, se refiere a lo verdadero, y podemos introducir la barra del juicio:

$$\vdash\!\!\top\!\!- 2^2 = 5;$$

con ello aseveramos que $2^2 = 5$ no es lo verdadero, o que 2^2 no es 5. Sin embargo,

$$-\!\!\top\!\!- 2$$

es lo verdadero, puesto que — 2 es lo falso:

$$\vdash\!\!\top\!\!- 2$$

esto es: 2 no es lo verdadero.

El modo en que represento la generalidad se percibirá mejor con la ayuda de un ejemplo. Supongamos que se tiene que expresar que todo objeto es igual a sí mismo. En

$$x = x$$

tenemos una función, cuyo argumento viene indicado por «x». Hay que decir ahora que el valor de esta función es siempre lo verdadero, sea lo que sea lo que tomemos como argumento. Entiendo por

$$\text{«}-\!\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!- f(\mathfrak{a})\text{»}$$

lo verdadero, cuando la función $f(x)$ tiene como valor siem-

pre lo verdadero, cualquiera que pueda ser su argumento; en todos los demás casos,

24 $$«\,\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\, f(\mathfrak{a})»$$

debe referirse a lo falso. Para nuestra función $x = x$ tenemos el primer caso. Por consiguiente,

$$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\, \mathfrak{a} = \mathfrak{a}$$

es lo verdadero; y lo escribimos del modo siguiente:

$$\vdash\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\, \mathfrak{a} = \mathfrak{a}$$

Las barras horizontales a la derecha y a la izquierda de la concavidad han de considerarse como horizontales en nuestro sentido. En lugar de «$\mathfrak{a}$» podría elegirse cualquier otra letra gótica con excepción de aquellas que como, $\mathfrak{f}$ y $\mathfrak{g}$, han de servir como letras de función.

Esta notación ofrece la posibilidad de negar la generalidad, como en

$$\top\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\, \mathfrak{a}^2 = 1$$

Esto es: $\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\,\mathfrak{a}^2 = 1$ es lo falso, ya que el valor de la función $x^2 = 1$ no es, para cada argumento, lo verdadero. Así, por ejemplo, obtenemos para el argumento 2, $2^2 = 1$, y esto es lo falso. Ahora bien, si $\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\,\mathfrak{a}^2 = 1$, es lo falso, entonces $\top\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\, \mathfrak{a}^2 = 1$, es lo verdadero, de acuerdo con lo que se ha estipulado más arriba sobre la barra de negación. Tenemos, por consiguiente,

$$\vdash\!\top\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\,\mathfrak{a}^2 = 1;$$

es decir: «No todo objeto es raíz cuadrada de 1», o «Hay objetos que no son raíz cuadrada de 1».

25 ¿Se puede expresar también que hay raíces / cuadradas de 1? ¡Por supuesto! Sólo tenemos que tomar, en lugar de la función $x^2 = 1$, la función

$$\top\, x^2 = 1$$

A partir de

$$«-\!\overset{\alpha}{\smile}\!\!-\!\!\top\, \alpha^2 = 1»$$

resulta en virtud de la fusión de las horizontales

$$«-\!\overset{\alpha}{\smile}\!\!-\!\!\top\, \alpha^2 = 1».$$

Esto se refiere a lo falso, puesto que el valor de la función

$$\top\, x^2 = 1$$

no es, para todo argumento, lo verdadero. Por ejemplo,

$$—\, 1^2 = 1$$

es lo falso, pues $1^2 = 1$ es lo verdadero. Ahora bien, puesto que

$$-\!\overset{\alpha}{\smile}\!\!-\!\!\top\, \alpha^2 = 1$$

es lo falso,

$$\top\!\!-\!\overset{\alpha}{\smile}\!\!-\!\!\top\, \alpha^2 = 1$$

es lo verdadero:

$$\vdash\!\top\!\!-\!\overset{\alpha}{\smile}\!\!-\!\!\top\, \alpha^2 = 1$$

esto es: «no para cada argumento será el valor de la función

$$\top\, x^2 = 1$$

lo verdadero» o «no para cada argumento será el valor de la función $x^2 = 1$ lo falso», o «hay al menos una raíz cuadrada de 1».

A continuación se presentan algunos ejemplos en signos y palabras:

$$\vdash\!\top\!\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!\top\, \mathfrak{a} \geqq 0$$

hay al menos un número positivo;

26

$$\vdash\!\top\!\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!\top\, \mathfrak{a} < 0$$

hay al menos un número negativo;

$$\vdash\!\top\!\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!\top\, \mathfrak{a}^3 - 3\,\mathfrak{a}^2 + 2\mathfrak{a} = 0$$

hay al menos una raíz de la ecuación

$$x^3 - 3x^2 + 2x = 0.$$

Partiendo de esto, puede verse cómo se expresan las importantes proposiciones existenciales. Si indicamos indeterminadamente un concepto mediante la letra de función f, tenemos entonces en:

$$\top\!\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!\top\, f(\mathfrak{a})$$

la forma en la que están incluidos los últimos ejemplos, si se prescinde de la barra del juicio. Las expresiones

$$«\top\!\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!\top\, \mathfrak{a}^2 = 1», «\top\!\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!\top\, \mathfrak{a} \geqq 0»,$$

$$«\top\!\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!\top\, \mathfrak{a} < 0»,$$

$$«\top\!\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!\top\, \mathfrak{a}^3 - 3\,\mathfrak{a}^2 + 2\mathfrak{a} = 0»$$

surgen de esta forma de manera similar a como, por ejemplo, «1^2», «2^2», «3^2» resultan de x^2. Del mismo modo en que tenemos en x^2 una función cuyo argumento viene indicado por «x», así también entiendo

$$«\top\!\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!\top\, f(\mathfrak{a})»$$

como expresión de una función cuyo argumento se indica mediante «*f*». Es claro que tal función es fundamentalmente diferente de las que hemos considerado hasta ahora, pues sólo una función puede aparecer como su argumento. Ahora bien, así como las funciones son fundamentalmente diferentes de los objetos, del mismo modo aquellas funciones cuyos argumentos son y tienen que ser funciones son funda-
27 mentalmente distintas de las funciones cuyos argumentos son objetos y no / pueden ser otra cosa. A éstas las llamo funciones de primer nivel; a aquéllas, funciones de segundo nivel. Del mismo modo, distingo entre conceptos de primer y de segundo nivel[8]. Ciertamente, en el análisis se han tenido desde hace tiempo funciones de segundo nivel, por ejemplo en las integrales determinadas, en tanto que se considera como argumento la función a integrar.

Ahora puede añadirse algo sobre las funciones con dos argumentos. Obtuvimos la expresión de una función al descomponer el signo compuesto de un objeto en una parte saturada y una insaturada. Descompusimos, por ejemplo, el signo de lo verdadero

«$3 > 2$»

en «3» y «$x > 2$». Podemos descomponer adicionalmente la parte insaturada «$x > 2$» de la misma manera en «2» y

«$x > y$»,

donde «y» da a conocer ahora el lugar vacío que antes estaba rellenado por «2». En

$$x > y$$

[8] Cf. mis *Grundlagen der Arthmetik*, Breslau, 1884 [versión castellana: *Fundamentos de la aritmética*, Laia, Barcelona, 1972], 53, al final, donde en lugar de «segundo nivel» he dicho «segundo orden». La prueba ontológica a favor de la existencia de Dios adolece del error de tratar a la existencia como un concepto de primer nivel.

tenemos una función con dos argumentos, uno de los cuales viene indicado por «x» y el otro por «y», y en

$$3 > 2$$

28 tenemos el valor de esa función para los / argumentos 3 y 2. Tenemos aquí una función cuyo valor es constantemente un valor de verdad. Hemos llamado conceptos a funciones tales con un argumento; llamamos relaciones a las funciones con dos argumentos. Por consiguiente, tenemos relaciones en, por ejemplo,

$$x^2 + y^2 = 9$$

y en

$$x^2 + y^2 > 9,$$

mientras que la función

$$x^2 + y^2$$

tiene números como valores. Por tanto, no la llamaremos relación.

Puede introducirse aquí una función que no es peculiar de la aritmética. Sea el valor de la función

$$\begin{array}{l} \text{—┬—} x \\ \quad \text{└—} y \end{array}$$

lo falso si se toma lo verdadero como argumento-y y, al mismo tiempo, se toma como argumento-x, un objeto que no es lo verdadero; en todos los restantes casos sea el valor de esta función lo verdadero. La barra horizontal inferior y las dos partes en las queda descompuesta la superior por la vertical han de considerarse como horizontales. En consecuencia, — x e — y pueden considerase siempre como argumentos de nuestra función, esto es: como valores de verdad.

Distinguimos, entre las funciones de un argumento, las

de primer nivel y las de segundo nivel. Es posible aquí una
29 gran diversidad. Una función de dos argumentos puede ser, en / relación con ellos, del mismo o de diferente nivel: funciones de nivel igual o desigual. Las consideradas hasta ahora eran de igual nivel. Una función de nivel desigual es, por ejemplo, el cociente diferencial, si se toman como argumentos la función a diferenciar y el argumento para el que ésta se diferencia, o la integral determinada, en la medida en que se toman como argumentos la función a integrar y el límite superior. Las funciones de igual nivel pueden dividirse adicionalmente entre las de primer y segundo nivel. Un ejemplo de una de segundo nivel es, por ejemplo,

$$F(f(1)),$$

donde F y f indican los argumentos.

Se debe distinguir, en las funciones de segundo nivel con un argumento, el caso en el que aparece en este argumento una función de un argumento de aquel en que lo hace una función con dos; pues una función con un argumento es tan esencialmente distinta de una función con dos argumentos, que simplemente la una no puede ocupar como argumento el mismo lugar que puede ocupar la otra. Algunas funciones de segundo nivel con un argumento, reclaman como tal una función con un argumento, otras reclaman una función con dos argumentos, y estas dos clases están nítidamente separadas.

$$\smile^{\mathfrak{e}}\smile^{\mathfrak{b}}\smile^{\mathfrak{a}}\ \begin{array}{l} \mathfrak{b} = \mathfrak{a} \\ f(\mathfrak{e}, \mathfrak{a}) \\ f(\mathfrak{e}, \mathfrak{b}) \end{array}$$

30

es un ejemplo de una función de segundo nivel con / un argumento que, como tal, reclama una función con dos argumentos. La letra f indica aquí el argumento, y los dos lugares separados por la coma en los paréntesis que siguen a f ponen de manifiesto que f está por una función con dos argumentos.

Entre la funciones con dos argumentos hay una diversidad aún mayor.

Si desde aquí echamos una mirada retrospectiva al desarrollo de la matemática, reconocemos un progreso escalonado. Al principio se calculaba con números individuales, con el 1, el 3, etc.

$$2 + 3 = 5, 2 \cdot 3 = 6$$

son teoremas de este género. A continuación se avanza hacia leyes más generales que valen para todos los números. En la notación esto corresponde al paso al álgebra. En

$$(a + b) \cdot c = a \cdot b + b \cdot c$$

tenemos un teorema de ese género. Con esto quedó establecido el considerar funciones singulares, sin utilizar todavía la palabra en el sentido matemático y sin que se hubiese captado todavía su significado. El paso inmediato hacia delante fue el reconocimiento de leyes generales de funciones y con ello vino el acuñar la expresión artificial «función». A esto corresponde en la notación la introducción de letras como *f*, *F*, para indicar funciones de manera indeterminada. En

$$\frac{df(x) \cdot \mathrm{F}(x)}{dx} = \mathrm{F}(x) \cdot \frac{df(x)}{dx} + f(x) \frac{dF(x)}{dx}$$

31 tenemos un teorema de este género. Así se tenían / funciones singulares de segundo nivel, sin captar todavía lo que hemos llamado función de segundo nivel. Al hacerse esto, se da el siguiente paso hacia delante. Se podría pensar que esto habrá de continuar así. Sin embargo, este último avance no es, probablemente, tan rico en consecuencias como los anteriores, pues en avances posteriores uno puede, en lugar de las funciones de segundo nivel, tener en cuenta las del primero, como se mostrará en otro lugar. Con esto no se suprime la diferencia entre funciones de primer y de segundo nivel, ya que tal diferencia no se estableció de modo arbitrario, sino que está profundamente fundada en la naturaleza de las cosas.

A las funciones con dos argumentos se las puede considerar también como funciones de un solo argumento, aunque complejo; pero, con todo, la diferencia entre funciones con uno y con dos argumentos permanece con toda su nitidez.

CARTA A HUSSERL*

24 de mayo de 1891

96 Jena
24 de mayo de 1891

Querido Doctor:

Me ha producido un gran placer el envío de su *Filosofía de la Aritmética*[a], así como su nota crítica sobre las *Conferencias sobre el Álgebra de la Lógica* de Schröder[b] y su ensayo sobre «El cálculo inferencial y la lógica del contenido»[c]. Aparte de algunas divergencias respecto de mis puntos de vista, creo ver también en sus escritos algunos puntos con los que estoy de acuerdo. He leído su nota sobre la obra de Schröder con gran interés, y esto me ha inducido a poner por escrito ahora mis reflexiones, en vez de esperar a que aparezca el volumen, II tal como había planeado hacer anteriormente. Mis notas quizás aparezcan en el *Zeitschrift für Phi-*

---

* Esta carta fue publicada originalmente en Gottlob Frege, *Wissenschaftlicher Briefwechsel*, Felix Meiner, Hamburgo, 1976, pp. 96-98. Como respuesta al envío por parte de Husserl de su *Filosofía de la Aritmética*, Frege le remitió esta carta, donde se ofrece la explicación más iluminadora de su concepción de las relaciones entre los predicados y sus sentidos y referencias y los conceptos y sus extensiones.

[a] E. Husserl (1881), *Philosophie der Arithmetik; Psychologische und logische Untersuchungen*, I, Helle.

[b] E. Husserl (1890), «Rezension von: E. Schröder, *Vorlesungen über die Algebra der Logik (Exakte Logik)*, I, Leipzig.

[c] E. Husserl (1891), «Der Folgerungscalcul und die Inhaltslogik», *Vierteljahrsschirft für wissenchaftliche Philosophie*, XV, pp. 168-189, con suplemento, pp. 351-356.

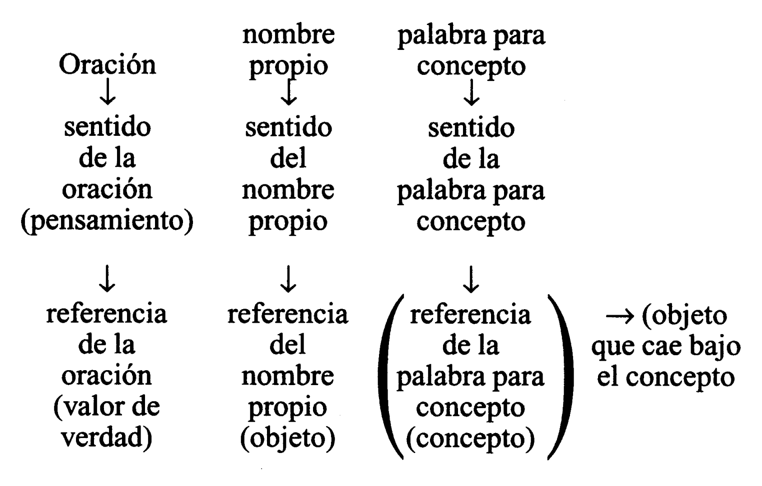
losophie und philosophische Kritik[d]. Estoy de acuerdo con usted en que las definiciones de Schröder de 0, 1, $a + b$, y $a \times b$ son defectuosas. Estrictamente hablando, Schröder define, en lugar de $a + b$, el signo $\notin$una segunda vez junto con el signo +. Una y la misma definición no puede usarse para dos cosas diferentes, y menos aún, algo que ya ha sido definido previamente. El signo $\notin$ debería haberse introducido de una vez para todos los casos posibles. Incluso si la expresión $a + b$ se había definido ya por sí misma, debería seguirse sin indicación adicional alguna lo que debería de entenderse por «$a + b = c$». Si, sorprendidos, hemos fruncido el ceño la primera vez que apareció $\sqrt{-1}$ a la vez que preguntamos qué significado tenía, esto sólo era un signo de que la primera introducción del signo de raíz cuadrada contenía una laguna y era, por consiguiente, defectuoso. Debería haber sido tal que no pudiese haber duda alguna respecto de $\sqrt{-1}$, una vez que el signo «—» y «1» se hubiesen explicado correctamente. Por lo que respecta al argumento de Schröder en la página 245, que usted dice que es un sofisma, creo que puedo mostrar que, a partir de los principios de Schröder, podemos obtener, de hecho, tanto el resultado de Schröder como el suyo propio, puesto que la «clase» de Schröder combina dos significados en uno. Si nos adherimos a uno de ellos, entonces debemos rechazar absolutamente el 0 de Schröder; el algoritmo puede, dicho sea de paso, mantenerse, si el significado de « $\notin$ » se define adecuadamente, pero esto no tiene absolutamente nada que ver con la lógica. En el otro caso 0 es admisible y, en este caso, nos ocupamos realmente de consideraciones lógicas; pero la claridad intuitiva se pierde, y los diagramas de Euler no son en absoluto una excepción.

Pero aquí sólo puedo insinuar este asunto.

Le doy las gracias especialmente por su *Filosofía de la Aritmética*, en la que toma nota de mis propios y similares esfuerzos, quizás de la manera más concienzuda que, hasta el presente se haya hecho. Espero encontrar tiempo en breve para responder a sus objeciones. Ahora, todo lo que me gus-

[d] En realidad, las notas de Frege aparecieron en otra revista. G. Frege (1895), «Kritische Beleuchtung einiger Punkte in E. Schröder's *Vorlesungen über die Algebra der Logik*», *Archiv für systematische Philosophie*, I, pp. 433-456.

taría decir sobre ello es que parece haber una diferencia de opinión entre nosotros respecto de cómo una palabra para concepto (nombre común) se relaciona con los objetos. El esquema siguiente clarificará mis puntos de vista:



Cuando tenemos una palabra para concepto, necesitamos dar un paso más para alcanzar el objeto que cuando tenemos un nombre propio, y el último paso puede que no se dé nunca —esto es: el concepto puede ser vacío— sin que la palabra para concepto deje de ser científicamente útil. He trazado horizontalmente el último paso del concepto al objeto para indicar que tiene lugar al mismo nivel, que los objetos y los conceptos tienen la misma objetividad (ver mis *Fundamentos*, § 47). En el uso literario es suficiente que todo tenga un sentido; en el uso científico tiene que haber también referencias. En los *Fundamentos,* no había trazado aún la distinción entre sentido y referencia. En § 97 hubiera preferido hablar ahora de «tener una referencia» en lugar de «tener un sentido». También en otros lugares, por ejemplo en los §§100, 101, 102, reemplazaría ahora a menudo, «sentido» por «referencia». Lo que anteriormente llamaba contenido enjuiciable se divide ahora en pensamiento y valor de verdad. El juicio, en el sentido más estricto, podría caracterizarse como una transición de un pensamiento a un valor de verdad.

Ahora bien, me parece que, para usted, el esquema tendría más o menos el aspecto siguiente:

palabra para concepto
↓
sentido de la palabra para concepto
(sentido)
↓
objeto que cae bajo el concepto

de modo que para usted tendrían que darse el mismo número de pasos para pasar de nombres propios a objetos que desde palabras para concepto. La única diferencia entre nombres propios y palabras para concepto sería que los primeros podrían referirse a sólo un objeto, mientras que las segundas lo harían a más de uno. Una palabra para concepto cuyo concepto sea vacío tendría entonces que excluirse de la ciencia, lo mismo que un nombre propio sin el objeto correspondiente.

Como respuesta a sus valiosos regalos sólo puedo enviarle ahora unos pocos escritos breves. A partir de los dos ensayos sobre mi conceptografía[e] espero que sea usted capaz de darse cuenta de que el juicio de Schröder (en sus *Vorlesungen über die Algebra der Logik*, p. 95, nota) carece de fundamento. Es cierto que esos ensayos no reflejan fielmente mi posición actual, como puede usted ver comparándolos con mi «Sobre función y concepto»[f]. Pero, como se pueden traducir fácilmente a mi terminología actual, pueden servirle a pesar de todo para hacerse una idea del uso de mi conceptografía. En vez de hablar de una «circunstancia», debería hablarse de un «valor de verdad».

En la esperanza de que el intercambio de ideas entre nosotros ha de continuar y ha de contribuir de algún modo al avance de la ciencia, quedo a su disposición.

Sinceramente,
Dr. G. Frege

---

[e] Se trata de «Anwendungen der Begriffsschrift», *Jenaische Zeitschrift für Naturwissenchaft*, XIII (1879), Suplemento II, pp. 29-33, y «Über den Zweck der Begriffsschrift», *Jenaische Zeitschrift für Naturwissenchaft*, XVI (1883), Suplemento, pp. 1-10.

[f] Ver pp. 53-79 de este volumen.

SOBRE SENTIDO Y REFERENCIA*

25 La igualdad[1] incita a la reflexión por medio de preguntas enlazadas con ella que no son en absoluto fáciles de responder. ¿Es la igualdad una relación?, ¿es una relación entre objetos?, ¿o entre nombres o signos de objetos? Esto último es lo que supuse en mi *Conceptografía*[a]. Las razones que parecen hablar a favor de ello son las siguientes: $a = a$ y $a = b$ son, obviamente, proposiciones de distinto valor cognoscitivo: $a = a$ vale *a priori* y, de acuerdo con Kant, ha de llamarse analítica, mientras que proposiciones de la forma $a = b$ contienen muy a menudo ampliaciones muy valiosas de nuestro conocimiento y no pueden siempre establecerse *a priori*. El descubrimiento de que cada mañana no sale un nuevo Sol, sino que siempre es el mismo, ha sido ciertamente uno de los descubrimientos de la astronomía más rico en consecuencias. Aún hoy día la identificación de un pequeño
26 planeta o de un cometa no es siempre algo / rutinario. Ahora bien, si quisiéramos ver en la igualdad una relación entre aquello a lo que se refieren los nombres «*a*» y «*b*», parecería entonces que $a = b$ no podría diferir de $a = a$, en el caso de que $a = b$ sea verdad. Con ello se habría expresado una relación de una cosa consigo misma y, ciertamente, una relación en la que cada cosa está consigo misma, pero que ninguna

* Este artículo fue publicado bajo el título «Über Sinn und Bedeutung» en *Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik*, vol. 100, 1982, pp. 25-50. Presenta y discute la que, sin duda, es la más conocida e influyente de las tesis semánticas de Frege: la distinción entre sentido y referencia.

[1] Uso esta palabra en el sentido de identidad y entiendo «$a = b$» en el sentido de «*a* es lo mismo que *b*» o «*a* y *b* coinciden».

[a] *Begriffsschrift, eine der arithmetisches nachgebildete Formelnsprache des reinen Denkens*, Halle, 1879. Versión castellana: *Conceptografía, un lenguaje de fórmulas, semejante al de la aritmética, para el pensamiento puro*, UNAM, México, 1972.

cosa mantiene con otra distinta. Lo que se quiere decir con $a = b$ parece ser esto: los signos o nombres «a» y «b» se refieren a lo mismo y, en consecuencia, estaríamos hablando justamente de esos signos; se aseveraría una relación entre ellos. Pero esa relación se mantendría entre los nombres o signos sólo en la medida en que nombran o designan algo. Sería una relación facilitada por la conexión de cada uno de los dos signos con la misma cosa designada. Pero esto es arbitrario. No se puede prohibir a nadie tomar como signo de algo cualquier acontecimiento u objeto arbitrariamente producido. De este modo, una proposición $a = b$ ya no sería algo concerniente a la cosa misma, sino a nuestro modo de designación; con ella no expresaríamos ningún conocimiento genuino. Pero esto es precisamente lo que queremos en muchos casos. Si el signo «a» se distingue del signo «b» sólo como objeto (aquí, por medio de su forma), no como signo, es decir: no por la manera como designa algo, entonces el valor cognoscitivo de $a = a$ sería esencialmente igual al de $a = b$, en el caso de que $a = b$ sea verdadera. Sólo puede haber una distinción si a la diferencia de signos corresponde una diferencia en el modo de presentación de lo designado. Sean a, b y c las rectas que unen los vértices de un triángulo con los puntos medios de los lados opuestos. El punto de intersección de a y b es entonces el mismo que el punto de intersección de b y c. Tenemos pues distintas designaciones para el mismo punto, y estos nombres («punto de intersección de a y b» y «punto de intersección de b y c») indican al mismo tiempo el modo de presentación, y es por ello por lo que la proposición contiene un conocimiento efectivo.

Así pues, resulta natural pensar que con un signo (nombre, unión de palabras, signos escritos) está unido además de lo designado, lo que se podría llamar la referencia del signo, lo que me gustaría llamar el sentido del signo, donde está contenido el modo de presentación. De acuerdo con esto, en
27 nuestro ejemplo / la referencia de las expresiones «el punto de intersección de a y b» y «el punto de intersección de b y c» es la misma, pero no sus sentidos. La referencia de «el lucero de la mañana» y «el lucero de la tarde» es la misma, pero no el sentido.

Se desprende del contexto que he entendido aquí por

«signo» y «nombre» cualquier designación por la que esté un nombre propio, cuya referencia es, por consiguiente, un objeto determinado (tomada esta palabra en la más amplia extensión), pero no un concepto ni una relación, sobre los que se tratará más de cerca en otro artículo[b]. La designación de un único objeto puede también consistir en varias palabras u otros signos cualesquiera. Para abreviar, se llamará nombre propio a cada una de tales designaciones.

El sentido de un nombre propio es captado por cualquiera que conoce de manera suficiente el lenguaje o la totalidad de las designaciones a las que pertenece[2]; pero con esto la referencia, en el caso de que la tenga, sólo se ilumina parcialmente. Para un conocimiento completo de la referencia se requeriría que, para cada sentido dado, pudiésemos decir al instante si está asociado o no con ella. A eso no llegamos nunca.

La conexión regular entre el signo, su sentido, y su referencia, es de tal género, que al signo le corresponde un sentido determinado y a éste, a su vez, una referencia determinada, mientras que a una referencia (a un objeto) no le pertenece sólo un signo. El mismo sentido tiene distintas expresiones en distintos lenguajes, por no hablar del mismo lenguaje. Ciertamente, hay excepciones a este comportamiento regular. Desde luego, en una totalidad completa de signos a cada expresión debería corresponderle un sentido determi-
28 nado; pero las lenguas naturales / no cumplen muchas veces esta exigencia, y debemos contentarnos si la misma palabra tiene siempre el mismo sentido en el mismo contexto. Puede quizás admitirse que una expresión gramaticalmente bien

---

[b] Se refiere el autor aquí a «Sobre concepto y objeto». Ver pp. 123-139 de este volumen,

[2] Por lo que respecta a un nombre propio genuino como «Aristóteles», las opiniones sobre su sentido pueden ser, desde luego, discrepantes. Se podría suponer, por ejemplo, que es lo siguiente: el discípulo de Platón y el maestro de Alejandro Magno. Quien hace esto asignará a la oración «Aristóteles nació en Estagira» un sentido distinto que aquél que supone que el sentido del nombre es: el maestro de Alejandro Magno que nació en Estagira. Ahora bien, mientras la referencia sea la misma pueden admitirse esas variaciones de sentido, aunque deben evitarse en la estructura teórica de una ciencia demostrativa y no se debería permitir que ocurriesen en un lenguaje perfecto.

formada, que está por un nombre propio, tiene siempre un sentido. Ahora bien, con esto no se ha dicho que al sentido le corresponda también una referencia. Las palabras «el cuerpo celeste más distante de la Tierra» tienen un sentido; pero es muy dudoso que tengan también una referencia. La expresión «la serie menos convergente», tiene un sentido; pero se puede demostrar que no tiene referencia, pues para cada serie convergente se puede encontrar otra menos convergente, pero que, con todo, es convergente. Por consiguiente, el que se haya captado un sentido no asegura el que se tenga una referencia.

Cuando las palabras se usan de modo habitual, aquello de lo que se quiere hablar es su referencia. Pero puede también suceder que se quiera hablar de las palabras mismas o de su sentido. Tal cosa sucede, por ejemplo, cuando se citan las palabras de otro en estilo directo. En este caso, las palabras del propio hablante se refieren en primer lugar a las palabras de la otra persona y sólo éstas tienen la referencia habitual. Tenemos entonces signos de signos. Cuando se ponen por escrito, las palabras se encierran, en este caso, entre comillas. Por consiguiente, una palabra que va entre comillas no debe tomarse como si tuviera su referencia habitual.

Si se quiere hablar del sentido de una expresión «*A*», puede hacerse usando sencillamente el giro «el sentido de la expresión "*A*"». En el estilo indirecto se habla, por ejemplo, del sentido de lo que ha dicho otra persona. Resulta claro también que en esta manera de hablar las palabras no tienen su referencia habitual, sino que se refieren a lo que habitualmente es su sentido. Para expresarlo con brevedad diremos: en estilo indirecto las palabras se usan *indirectamente* o tienen su referencia *indirecta*. Por consiguiente, distinguimos entre la referencia *habitual* de una palabra y su referencia *indirecta* y entre su sentido *habitual* y su sentido *indirecto*. La referencia indirecta de una palabra es, de acuerdo con esto, su sentido habitual. Tales excepciones tienen siempre que tenerse presentes si se quiere captar correctamente, en los casos particulares, los modos de conexión entre signo, sentido y referencia.

29 Ha de distinguirse la referencia y el sentido de un signo de la representación asociada con él. Si la referencia de un

signo es un objeto sensorialmente perceptible, entonces mi representación de él es una imagen[3] originada a partir de recuerdos de impresiones sensoriales que he tenido y de actividades, tanto internas como externas, que he ejercitado. Esta imagen está a menudo impregnada de sentimientos; la claridad de sus partes individuales es diversa y oscilante. No siempre, ni siquiera en el mismo hombre, está ligada la misma representación con el mismo sentido. La representación es subjetiva: la representación de uno no es la del otro. De aquí que se den múltiples diferencias en las representaciones asociadas con el mismo sentido. Un pintor, un jinete, un zoólogo asociarán probablemente representaciones muy distintas con el nombre «Bucéfalo». Por ello la representación se diferencia esencialmente del sentido de un signo, que puede ser propiedad común de muchos y no es, por tanto, una parte o un modo de una mente individual; así pues, no podrá negarse que la humanidad tiene ciertamente un tesoro común de pensamientos que transmite de una generación a otra[4].

Mientras que, de acuerdo con lo anterior, no hay escrúpulo alguno en hablar lisa y llanamente del sentido, en el caso de la representación tenemos que añadir, estrictamente hablando, a quién pertenece y en qué tiempo. Se podría quizás decir: del mismo modo que con la misma palabra uno conecta esta representación y otro aquélla, también uno puede asociar con ella este sentido y otro aquél. Pero entonces la diferencia consiste sólo en el modo de esa asociación. Esto
30 no impide que ambos capten el mismo sentido; / pero no pueden tener la misma representación. *Si duo idem faciunt, non est idem.* Si dos se representan lo mismo, cada uno tiene, a pesar de todo, su propia representación. Ciertamente,

[3] Podemos poner también junto a las representaciones las intuiciones en las que las impresiones sensoriales y las actividades mismas ocupan el lugar de las huellas que han dejado en la mente. Las distinción es irrelevante para nuestros propósitos, máxime cuando junto a las sensaciones y actividades los recuerdos de éstas ayudan a completar la imagen intuitiva. Pero un objeto puede entenderse también por intuición, en tanto que sea sensorialmente perceptible o espacial.

[4] Es, por tanto, muy poco conveniente designar con la palabra «representación» cosas tan fundamenalmente distintas.

es posible a veces establecer diferencias entre las representaciones, e incluso entre las sensaciones, de distintos hombres; pero no es posible una auténtica comparación, porque no podemos tener esas representaciones juntas en la misma conciencia.

La referencia de un nombre propio es el objeto mismo que designamos por medio de él; la representación que tenemos en este caso es completamente subjetiva; entre ambos está el sentido, que ciertamente ya no es subjetivo como la representación, pero que tampoco es el objeto mismo. El siguiente símil es quizás apropiado para esclarecer estas relaciones. Alguien observa la Luna a través de un telescopio. Comparo la Luna misma con la referencia; es el objeto de observación, que viene dado por la imagen real que se proyecta en la lente del objetivo del interior del telescopio y por la imagen retiniana del observador. A la primera imagen la comparo con el sentido; a la segunda, con la representación o intuición. La imagen del telescopio es, ciertamente, unilateral, depende del lugar de observación; pero es, con todo, objetiva en la medida en que puede servir a muchos observadores. En cualquier caso, podría disponerse de tal manera que muchos la usaran al mismo tiempo. Pero, por lo que respecta a las imágenes retinianas, cada uno tendría la suya propia. Apenas si se alcanzaría incluso una congruencia geométrica debido a las distintas conformaciones de los ojos, y quedaría excluida una coincidencia real. Este símil podría quizás desarrollarse adicionalmente si se supusiera que la imagen retiniana de *A* podría hacerse visible a *B*; o también que el mismo *A* podría ver su propia imagen retiniana en un espejo. Con esto quizás pudiéramos mostrar cómo una representación puede ser tomada de hecho como objeto, pero como tal no es para el observador lo que es directamente para el que se la representa. Pero seguir discutiendo esto nos apartaría demasiado de nuestro camino.

Podemos reconocer ahora tres niveles de diferenciación entre las palabras, expresiones y oraciones completas. O bien la diferencia atañe a lo sumo a las representaciones, o al sentido pero no a la referencia, o, finalmente, también a la
31 referencia. Con respecto al / primer nivel, ha de señalarse que, debido a la inseguridad de la conexión entre representa-

ciones y palabras, para uno puede existir una diferencia que el otro no encuentra. La diferencia entre la traducción y el escrito original no debería sobrepasar este primer nivel. A las posibles diferencias que pueden encontrarse aquí pertenecen las coloraciones y las iluminaciones que la poesía y la elocuencia buscan dar al sentido. Estas coloraciones e iluminaciones no son objetivas, sino que cada oyente o lector debe dejarse transportar por las sugerencias del poeta o del orador. Sin una afinidad de las representaciones humanas el arte no sería ciertamente posible; pero en qué medida se corresponden éstas con las intenciones del poeta es algo que jamás se pude averiguar completamente.

En lo que sigue no se hablará ya más de las representaciones e intuiciones; sólo se las ha mencionado aquí para que no se confunda la representación que una palabra despierta en un oyente con su sentido o su referencia.

Para hacer posible que nos expresemos de una manera breve y exacta, establezcamos la terminología siguiente:

> Un nombre propio (palabra, signo, combinación de signos, expresión) expresa su sentido, se refiere a, o designa, su referencia. Con un signo expresamos su sentido y designamos su referencia.

Del lado del escepticismo y del idealismo se habrá objetado ya desde hace tiempo: «Hablas aquí sin más de la Luna como un objeto; pero ¿cómo sabes que el nombre "la Luna" tiene una referencia, cómo sabes que, en general, hay algo que tiene una referencia?» Respondo que cuando decimos «la Luna» no es nuestra intención hablar de nuestra representación de la Luna, y que tampoco nos contentamos con el sentido, sino que presuponemos una referencia. Sería confundir completamente el sentido el que se quisiera suponer que en la oración «La Luna es menor que la Tierra», se está hablando de una representación de la Luna. Si el hablante quisiera decir esto, usaría el giro «mi representación de la Luna». Ahora bien, podemos desde luego errar en esta presuposición, y tales errores han ocurrido de hecho. Pero la
32 cuestión de si quizás erramos siempre en esto, puede / quedar aquí sin respuesta; es, en principio, suficiente, para justi-

ficar el que se hable de la referencia de un signo, el señalar nuestra intención al hablar o al pensar, si bien con la reserva: caso de que exista tal referencia.

Hasta ahora se ha considerado solamente el sentido y la referencia de aquellas expresiones, palabras, signos, que se han llamado nombres propios. Vamos a preguntarnos ahora por el sentido y la referencia de una oración asertórica completa. Tal oración contiene un pensamiento[5]. Ahora bien, ¿ha de considerarse ese pensamiento como su sentido o como su referencia? Supongamos que tal oración tiene una referencia. Si reemplazamos en ella una palabra por otra con la misma referencia, pero con diferente sentido, tal reemplazo no puede tener influencia alguna sobre la referencia de la oración. Podemos ver, sin embargo, que en tal caso el pensamiento cambia; pues el pensamiento de, por ejemplo, la oración «El lucero de la mañana es un cuerpo iluminado por el Sol» difiere del de la oración «El lucero de la tarde es un cuerpo iluminado por el Sol». Alguien que no supiese que el lucero de la tarde es el lucero de la mañana podría tener un pensamiento por verdadero y el otro por falso. Por consiguiente, el pensamiento no puede ser la referencia de la oración; por el contrario, hemos de concebirlo como el sentido. Pero ¿qué sucede con la referencia? ¿Tenemos derecho, en suma, a preguntar por ella? ¿Tiene quizás la oración como un todo sólo un sentido, pero no una referencia? En todo caso, puede esperarse que se den tales oraciones, del mismo modo que hay partes de oraciones que tienen ciertamente un sentido, pero que no tienen referencia. Las oraciones que contienen nombres propios sin referencia serán de este género. La oración «Ulises fue desembarcado en Ítaca profundamente dormido» tiene obviamente un sentido. Pero, puesto que es dudoso que el nombre «Ulises» que aparece en ella tenga una referencia, es también dudoso que la oración entera la tenga. Pero, con todo, es seguro que cualquiera que, seriamente, tenga a la oración por verdadera o por falsa, le adjudicará también una referencia al nombre «Ulises» y no

[5] Entiendo por pensamiento no al acto subjetivo de pensar, sino su contenido objetivo, que es capaz de ser propiedad común de muchos.

33 sólo un sentido; puesto que a la referencia de este / nombre es a lo que se atribuye o deja de atribuir el predicado. El que no admita una referencia no podrá atribuirle o dejar de atribuirle un predicado. Pero el avance hacia la referencia del nombre sería entonces superfluo; uno podría contentarse con el sentido, si no quisiera ir más allá del pensamiento. Si sólo se tratara del sentido de la oración, del pensamiento, no sería necesario preocuparse por la referencia de una parte de la oración; pues por lo que respecta al sentido de la oración, sólo entra en consideración el sentido de esa parte, no la referencia. El pensamiento sigue siendo el mismo, tenga o no el nombre «Ulises» una referencia. El que nos preocupemos por la referencia de una parte de la oración es un signo de que también reconocemos y exigimos en general una referencia para la oración misma. El pensamiento pierde valor para nosotros tan pronto como reconocemos que falta la referencia de una de sus partes. Por tanto, tenemos en verdad derecho a no contentarnos con el sentido de una oración y a preguntar también por su referencia. Pero ¿por qué queremos que todo nombre propio tenga no sólo un sentido sino también una referencia? ¿Por qué no nos basta el pensamiento? Porque, y en la medida en que, nos importa su valor de verdad. Éste no es siempre el caso. Al escuchar, por ejemplo, una epopeya, nos cautivan, además de la armonía del lenguaje, el sentido de las oraciones y las representaciones y los sentimientos despertados por ellas. Con la pregunta por la verdad abandonaríamos el goce artístico y adoptaríamos un enfoque científico. Por tanto, nos es indiferente si, por ejemplo, el nombre «Ulises» tiene una referencia, en la medida en que tomemos el poema como una obra de arte[6]. Es entonces la aspiración hacia la verdad la que nos impulsa sobre todo a avanzar del sentido a la referencia.

Hemos visto que a una oración hay que buscarle siempre una referencia, cuando se está interesado en la referencia de sus partes componentes; y esto sucede cuando y sólo cuando se da el caso de que nos preguntamos por el valor de verdad.

---

[6] Sería deseable tener una expresión especial para signos que tienen sólo sentido. Si, pongamos por caso, los llamásemos imágenes, las palabras de los actores en el escenario serían imágenes, e incluso el actor mismo sería una imagen.

34 Así pues, esto nos impulsa a aceptar que el *valor de verdad* de una oración es su referencia. Entiendo por valor de verdad de una oración la circunstancia de que es verdadera o falsa. No hay otros valores de verdad. Para abreviar, llamo a uno lo verdadero, al otro lo falso. Toda oración asertórica, en la que importe la referencia de sus palabras, ha de concebirse por lo tanto como un nombre propio, y su referencia, en el caso de que la tenga, es lo verdadero o lo falso. Estos dos objetos serán reconocidos, aunque sólo sea de modo implícito, por todo aquel que juzgue, que tenga algo por verdadero, por tanto también por el escéptico. La designación de los valores de verdad como objetos podría parecer aquí una ocurrencia arbitraria y quizás un mero juego de palabras, del que no debería extraerse ninguna consecuencia profunda. Lo que llamo objeto sólo se puede discutir propiamente en conexión con concepto y relación. Reservaré esto para otro artículo[c]. Pero, por lo menos, que quede claro a partir de ahora que en todo juicio[7] —por muy evidente que sea— se ha producido ya el paso del nivel de los pensamientos al nivel de las referencias (de lo objetivo).

Uno podría sentir la tentación de contemplar la relación del pensamiento con lo verdadero no como la del sentido con la referencia, sino como la del sujeto con el predicado. Podría efectivamente decirse: «El pensamiento de que cinco es un número primo es verdadero». Pero si se mira esto más cuidadosamente, se da uno cuenta de que con ello no se ha dicho realmente más que con la pura y simple oración «5 es un número primo». El que se asevere verdad es algo que reside en ambos casos en la forma de la oración asertórica, y cuando ésta no tiene su fuerza habitual, por ejemplo: en boca de un actor en el escenario, la oración «El pensamiento de que 5 es un número primo es verdadero» contiene también sólo un pensamiento, y ciertamente el mismo pensamiento que la pura y simple: «5 es un número primo». Se sigue de esto que la relación del pensamiento con lo verda-

[c] Se refiere Frege aquí nuevamente al artículo «Sobre concepto y objeto», pp. 123-139 de este volumen.

[7] Un juicio no es para mí la mera captación de un mensamiento, sino la aceptación de su verdad.

dero no debe compararse con la del sujeto con el predicado.

35 Sujeto y predicado son ciertamente (entendidos en sentido lógico) partes del pensamiento; para el conocimiento están al mismo nivel. Mediante la composición de sujeto y predicado sólo se alcanza siempre un pensamiento, nunca se pasa de un sentido a su referencia, de un pensamiento a su valor de verdad. Uno se mueve en el mismo nivel, pero no se avanza de un nivel al siguiente. Un valor de verdad no puede ser parte de un pensamiento, del mismo modo que no puede serlo el Sol, porque no es ningún sentido, sino un objeto.

Si nuestra conjetura de que la referencia de una oración es su valor de verdad es correcta, entonces éste debe permanecer inalterado cuando una parte de la oración se reemplaza por una expresión con la misma referencia pero distinto sentido. Y, de hecho, esto es lo que sucede. Leibniz aclara esto de modo directo: «*Eadem sunt, quae sibi mutuo substitui possunt, salva veritate*». Pues ¿qué otra cosa podría encontrarse que no fuese el valor de verdad, que pertenezca de manera general a toda oración en la que interese la referencia de las partes componentes y que permanezca inalterada al hacer una substitución del género mencionado?

Ahora bien, si el valor de verdad de una oración es su referencia, entonces, todas las oraciones verdaderas por una parte, y todas las falsas por otra, tienen la misma referencia. Vemos a partir de esto que en la referencia de la oración todo lo específico se borra. Nunca, por consiguiente, podemos interesarnos sólo en la referencia de una oración; pero tampoco el mero pensamiento proporciona conocimiento alguno, sino sólo el pensamiento junto con su referencia, esto es: con su valor de verdad. Los juicios pueden concebirse como avances de un pensamiento hacia su valor de verdad. Desde luego, esto no debe tomarse como una definición. El juzgar es algo completamente peculiar e incomparable. Se podría decir también que juzgar es distinguir partes dentro del valor de verdad. Esta distinción sucede remontándose al pensamiento. A cada sentido, que pertenece a un valor de verdad, le correspondería un género peculiar de descomposición. He usado aquí la palabra «parte» de una manera especial. De hecho, he transferido la relación entre el todo y las partes en la oración a su referencia, puesto que he llama-

do a la referencia de una palabra parte de la referencia de la
36 oración, cuando la palabra misma / es parte de la oración; esta manera de hablar es, desde luego, discutible, porque, por lo que respecta a la referencia, el resto no queda determinado por el todo y una parte, y porque la palabra «parte» se usa ya de modo distinto para los cuerpos. Haría falta crear para esto una expresión apropiada.

Se debe ahora seguir comprobando la conjetura de que el valor de verdad de una oración es su referencia. Hemos encontrado que el valor de verdad de una oración permanece inalterado cuando reemplazamos en ella una expresión por otra con igual referencia: pero todavía no hemos considerado el caso en el que la expresión a reemplazar es ella misma una oración. Ahora bien, si nuestro punto de vista es correcto, el valor de verdad de una oración que contiene a otra como parte, tiene que permanecer sin cambio alguno si substituimos la oración que es una parte por otra cuyo valor de verdad es el mismo. Deben esperarse excepciones cuando toda la oración o una parte están en estilo directo o indirecto; pues, como hemos visto, en estos casos la referencia de las palabras no es la habitual. Una oración se refiere en estilo directo a otra oración y en estilo indirecto a un pensamiento.

Esto nos lleva entonces a la consideración de las oraciones subordinadas. Éstas aparecen como parte de una oración compuesta que, desde el punto de vista lógico, se presenta también como una oración, es decir: como oración principal. Pero aquí tenemos que hacer frente a la cuestión de si vale también para las oraciones subordinadas el que su referencia es un valor de verdad. Del estilo indirecto sabemos ya lo contrario. Los gramáticos contemplan las oraciones subordinadas como representantes de partes de oraciones y las dividen en oraciones nominales (*Nennsätze*), aposiciones (*Beisätze*) y oraciones adverbiales (*Adverbsätze*). A partir de aquí podría surgir la conjetura de que la referencia de una oración subordinada no es un valor de verdad, sino que es la misma que la de un nombre, un adjetivo o un adverbio, para decirlo brevemente: la misma que la de una parte de la oración que no tiene como sentido un pensamiento, sino sólo una parte del mismo. Ahora bien, sólo una investigación

más a fondo puede arrojar luz sobre esto. Al hacerla, no nos mantendremos estrictamente en las categorías gramaticales, sino que agruparemos lo que es lógicamente similar. Busquemos en primer lugar los casos en los que el sentido de la oración subordinada no es, como ya hemos conjeturado, un pensamiento independiente.

37 A la clase de oraciones nominales abstractas que empiezan por «que» pertenece también el estilo indirecto; en él hemos visto que las palabras tienen su referencia indirecta, que coincide con lo que es su sentido habitual. Por tanto, la subordinada tiene como referencia en este caso un pensamiento, no un valor de verdad; como sentido, no un pensamiento, sino el sentido de las palabras «el pensamiento de que...», que es sólo una parte del pensamiento de la oración compuesta completa. Esto ocurre después de «decir», «oír», «opinar», estar convencido», «concluir» y palabras similares[8]. La situación es distinta, y ciertamente bastante complicada, después de palabras como «conocer», «saber», «imaginar», que se considerarán más adelante.

Que en nuestros casos la referencia de la oración subordinada es, de hecho, el pensamiento, se ve también en que es indiferente para la verdad del todo que el pensamiento sea verdadero o falso. Compárense, por ejemplo, las dos oraciones: «Copérnico creía que las órbitas de los planetas eran círculos» y «Copérnico creía que la apariencia del movimiento del Sol se produce por el movimiento real de la Tierra». Se puede reemplazar aquí, si perjuicio de la verdad, una oración subordinada por la otra. La oración principal junto con la subordinada sólo tiene como sentido un único pensamiento, y la verdad del todo no incluye ni la verdad ni la no verdad de la oración subordinada. En estos casos, no se permite reemplazar en la oración subordinada una expresión por otra que tenga la misma referencia habitual, sino sólo por una que tenga la misma referencia indirecta, es decir: el mismo sentido habitual. Si alguien quisiera concluir: la referencia de una oración no es su valor de verdad, «pues enton-

[8] En «*A* mintió al decir que había visto a *B*» la oración subordinada se refiere a un pensamiento, del que se dice, en primer lugar, que *A* lo ha aseverado como verdadero y, en segundo lugar, que *A* estaba convencido de su falsedad.

ces se la podría reemplazar en todas partes por otra con el mismo valor de verdad», habría probado demasiadas cosas; del mismo modo, uno podría aseverar que la referencia de la expresión «lucero de la mañana» no es Venus, puesto que no puede decirse en todo lugar «Venus» en vez de «lucero de la mañana». Sólo se tiene derecho a concluir que la referencia de una oración no es *siempre* su valor de verdad y que «luce-
38 ro de la mañana» no siempre / se refiere al planeta Venus: no lo hace cuando esta expresión tiene su referencia indirecta. Tal caso excepcional ocurre en la oración subordinada que se acaba de considerar, cuya referencia es un pensamiento.

Cuando se dice «parece que...» se quiere decir «me parece que...», o «soy de la opinión de que...». Tenemos, por tanto, otra vez el mismo caso. La situación es similar respecto de expresiones como «alegrarse», «lamentar», «aprobar», «censurar», «desear», «temer». Cuando, hacia el final de la batalla de Belle-Alliance[d], Wellington se alegró de que viniesen los prusianos, la razón de su alegría era una convicción. Si se hubiera equivocado, en tanto durase su ilusión, no por ello se habría alegrado menos, y antes de alcanzar la convicción de que venían los prusianos no podía alegrarse de ello, a pesar de que, de hecho, ya se estaban acercando.

Al igual que una convicción o una creencia es la razón de un sentimiento, también puede ser razón de otra convicción, como sucede en el caso de la inferencia. En la oración: «Colón infirió de la redondez de la Tierra que, viajando hacia el Oeste, podría alcanzar las Indias», tenemos como referencia de las partes dos pensamientos, que la Tierra es redonda y que Colón podría alcanzar las Indias viajando hacia el Oeste. Lo que importa aquí de nuevo es que Colón estaba convencido de una y otra cosa y que una convicción era la razón de la otra. El que la Tierra sea realmente redonda y el que Colón pudiese realmente alcanzar las Indias viajando hacia el Oeste, como él pensaba, es indiferente para la verdad de nuestra oración; pero no es indiferente el que reemplacemos «la Tierra» por «el planeta que va acompañado de una Luna, cuyo diámetro es mayor que la cuarta parte del

---

[d] Éste es el modo alemán de designar la batalla de Waterloo.

suyo propio». Tenemos también aquí la referencia indirecta de las palabras.

Las oraciones adverbiales finales con «para que» son también de este tipo; pues obviamente la finalidad es un pensamiento; de ahí que: referencia indirecta de las palabras, subjuntivo.

La oración subordinada con «que» después de «ordenar», «pedir», «prohibir», aparecería en estilo directo como imperativo. Tal oración subordinada no tiene referencia alguna, sino sólo un sentido. Una orden, una petición no son, ciertamente, pensamientos, aunque están al mismo nivel que
39 los pensamientos. Por ello, en las / oraciones subordinadas que dependen de «ordenar», «pedir», etc., las palabras tienen su referencia indirecta. La referencia de tal oración no es, por lo tanto, un valor de verdad, sino una orden, una petición y así sucesivamente.

Sucede algo similar en el caso de preguntas subordinadas, en giros como «dudar de que» o «no saber que». Es fácil ver que también aquí han de tomarse las palabras en su referencia indirecta. Las oraciones interrogativas indirectas con «quién», «qué», «dónde», «cuándo», «cómo», «por medio de qué», etc., a veces parecen acercarse mucho a las oraciones adverbiales, en las que las palabras tienen su referencia habitual. Lingüísticamente hablando, estos casos se diferencian por el modo del verbo. En el caso del subjuntivo, tenemos preguntas subordinadas y referencia indirecta de las palabras, de modo que un nombre propio no puede reemplazarse generalmente por otro nombre del mismo objeto.

En los casos considerados hasta ahora, las palabras de la oración subordinada tenían su referencia indirecta y por eso es explicable que la referencia de la oración subordinada misma fuese indirecta, es decir: no un valor de verdad, sino un pensamiento, una orden, una petición, una pregunta. La oración subordinada podría concebirse como un nombre; de hecho podría decirse: como un nombre propio de ese pensamiento, de esa orden, etc., pues como tal aparece en el contexto de la oración compuesta.

Pasamos ahora a otras oraciones subordinadas, en las que las palabras tienen ciertamente su referencia habitual, sin que aparezca sin embargo un pensamiento como sentido

y un valor de verdad como referencia. Quedará claro con ejemplos cómo es posible esto.

> «El que descubrió la forma elíptica de las órbitas de los planetas murió en la miseria.»

Si la oración subordinada tuviese aquí como sentido un pensamiento, tendría que ser posible entonces expresarlo también en una oración principal. Pero esto no funciona, porque el sujeto gramatical «el que» no tiene ningún sentido independiente, y sólo facilita las relaciones con la oración que va a continuación «murió en la miseria». Es por ello por lo que tampoco el sentido de la oración subordinada es un pensamiento completo y su referencia no es un valor de verdad, sino Képler. Podría objetarse que, no obstante, el sentido del todo encierra como parte un pensamiento, a saber: que hubo alguien que descubrió por vez primera la forma elíptica de las órbitas de los planetas; pues cualquiera que tuviese por
40 verdadero el todo / no podría negar esta parte. De esto último no cabe duda; pero sólo porque, de lo contrario, la oración subordinada «el que descubrió la forma elíptica de las órbitas de los planetas», no tendría referencia alguna. Cuando alguien asevera algo, hay siempre una presuposición obvia de que los nombres propios usados, simples o compuestos, tienen una referencia. Por tanto, cuando se asevera «Képler murió en la miseria», se presupone con ello que el nombre «Képler» designa algo; pero no se sigue de esto que esté contenido, en el sentido de la oración «Képler murió en la miseria», que el nombre «Képler» designa algo. Si éste fuera el caso, no podría la negación rezar del modo siguiente:

> «Képler no murió en la miseria»,

sino

> «Képler no murió en la miseria, o el nombre "Képler" carece de referencia».

Que el nombre Képler designa algo es tanto presuposición de la aserción

> «Képler murió en la miseria»

como de su contraria. Ahora bien, los lenguajes tienen el defecto de que es posible que contengan expresiones que por su forma gramatical parecen destinadas para designar un objeto, pero que en casos especiales no lo logran porque esto depende de la verdad de alguna otra oración. Así pues, depende de la verdad de la oración

> «Hubo alguien que descubrió la forma elíptica de las órbitas de los planetas»

el que la oración subordinada

> «el que descubrió la forma elíptica de las órbitas de los planetas»

designe realmente un objeto o sólo suscite apariencia de ello y, de hecho, carezca de referencia. Y es así como puede parecer que nuestra oración subordinada contiene como parte de su sentido el pensamiento de que hubo alguien que descubrió la forma elíptica de las órbitas de los planetas. Si esto fuera correcto, la negación rezaría así:

> «El que descubrió por vez primera la forma elíptica de las órbitas de los planetas, no murió en la miseria, o no hubo nadie que descubriese la forma elíptica de las órbitas de los planetas.»

41 Esto surge de una imperfección del lenguaje, de la que tampoco está completamente libre por lo demás el lenguaje simbólico del análisis; también aquí pueden aparecer combinaciones de signos que producen la apariencia de que se refieren a algo pero que, por lo menos hasta ahora, carecen de referencia, como, por ejemplo, las series divergentes infinitas. Esto puede evitarse por medio de una estipulación especial al efecto de que, por ejemplo, las series divergentes infinitas deban referirse al número 0. De un lenguaje lógicamente perfecto (conceptografía) ha de reclamarse que cada expresión que se ha formado como nombre propio de modo

gramaticalmente correcto, a partir de signos ya introducidos, designe también de hecho un objeto, y que no se introduzca ningún nuevo signo como nombre propio, sin que tenga asegurada una referencia. En los textos de lógica se advierte sobre la ambigüedad de las expresiones como fuente de errores lógicos. Como mínimo, tengo por igualmente oportuna la advertencia respecto de los nombres propios aparentes que no tienen referencia alguna. La historia de la matemática podría contar los errores que tienen aquí su origen. El uso demagógico facilitado por esta situación es también muy común, más común quizás que los errores inducidos por la ambigüedad de las palabras. «La voluntad del pueblo» puede servir como un ejemplo de esto; pues resulta fácil establecer que no hay ninguna referencia reconocida generalmente de esta expresión. Por tanto, no es algo que carezca de importancia el cegar de una vez para siempre, al menos para la ciencia, la fuente de estos errores. En ese caso serían imposibles objeciones tales como las discutidas anteriormente, pues la verdad de un pensamiento nunca podría depender de que un nombre tenga referencia.

Podemos tomar en consideración estas oraciones nominales juntamente con un género de oraciones adjetivas y adverbiales, que están, lógicamente hablando, en estrecha conexión con las primeras.

También las oraciones adjetivas sirven para formar nombres propios compuestos, aunque, a diferencia de las oraciones nominales, no se basten ellas solas para este propósito. Estas oraciones adjetivas han de considerarse equivalentes a adjetivos. En lugar de «la raíz cuadrada de 4 que es menor que 0», puede decirse «la raíz cuadrada negativa de 4». Tenemos aquí un caso en el que, a partir de una expresión conceptual, se forma un nombre propio compuesto con la ayuda del artículo determinado en singular, lo que, en cualquier
42 caso, es permisible cuando un objeto / y sólo uno cae bajo el concepto[9]. Ahora bien, las expresiones conceptuales pueden

[9] De acuerdo con lo que se ha observado, más arriba, a una tal expresión se le tendría que asegurar siempre una referencia por medio de una estipulación especial, mediante la prescripción, por ejemplo, de que ha de tener como referencia el número 0, cuando bajo el concepto no caiga ningún objeto o caiga más de uno.

formarse de tal manera que sus características se pongan de manifiesto mediante oraciones adjetivas como, en nuestro ejemplo, mediante la oración «que es menor que 0». Es obvio que tal oración adjetiva no puede tener, lo mismo que sucedía antes con la oración nominal, un pensamiento como sentido ni un valor de verdad como referencia, sino que tiene como sentido sólo una parte del pensamiento que, en algunos casos, puede expresarse por medio de un único adjetivo. También falta aquí, como en el caso de las oraciones nominales, el sujeto independiente y por ello se esfuma la posibilidad de reproducir el sentido de la oración subordinada en una oración principal independiente.

Los lugares, instantes, períodos de tiempo son, lógicamente hablando, objetos; por tanto, la designación lingüística de un determinado lugar, un determinado momento o un período de tiempo ha de concebirse como nombre propio. Ahora bien, las oraciones adverbiales de lugar y tiempo pueden usarse para formar tal nombre propio, de manera similar a como acabamos de ver en el caso de las oraciones nominales y adjetivas. Del mismo modo, pueden formarse expresiones para conceptos que aludan a lugares, etc. Ha de señalarse también aquí que el sentido de esas oraciones subordinadas no puede reproducirse en una oración principal, porque falta un componente esencial: la determinación del lugar o del tiempo, que sólo se indica mediante un pronombre relativo o una conjunción[10].

---

[10] En el caso de estas oraciones, son posibles, por lo demás, concepciones ligeramente distintas. El sentido de la oración «Después de que Schleswig-Holstein se hubo separado de Dinamarca, Prusia y Austria se enemistaron», puede reproducirse de la forma: «Después de la separación de Schleswig-Holstein de Dinamarca, Prusia y Austria se enemistaron». De acuerdo con esta concepción, resulta en verdad suficientemente claro que el pensamiento de que Schleswig-Holstein se separó alguna vez de Dinamarca no ha de tomarse como parte de este sentido, sino que ese pensamiento es la presuposición necesaria para que la expresión «después de la separación de Schleswig-Holstein de Dinamarca» tenga alguna referencia. Desde luego, nuestra oración puede concebirse de tal manera que se esté diciendo con ella que Schleswig-Holstein se separó alguna vez de Dinamarca. Tenemos entonces un caso que ha de considerarse más tarde. Para darse cuenta más claramente de la diferencia, pongámosnos en el pellejo de un chino que, debido a su escaso conocimiento de la historia europea, tiene por falso el que

También puede reconocerse las más de las veces en las
43 oraciones condicionales, como / hemos visto hace un momento en el caso de las oraciones nominales, adjetivas y adverbiales, un componente que indica de manera indeterminada, al que le corresponde en el consecuente uno similar. Al remitir ambos componentes el uno al otro, las dos oraciones se unen para formar un todo que, por regla general, expresa sólo un pensamiento. En la oración

«Si un número es menor que 1 y mayor que 0, también su cuadrado es menor que 1 y mayor que 0»

este componente es «un número» en el antecedente del condicional y «su» en el consecuente. Precisamente debido a esta indeterminación, recibe el sentido la generalidad que se espera de una ley. Pero justamente esto provoca también que el antecedente del condicional no tenga por sí solo como sentido un pensamiento completo y exprese, junto con el consecuente, uno y sólo un pensamiento, cuyas partes ya no son pensamientos. En general, es incorrecto decir que en un juicio hipotético se ponen recíprocamente en relación dos juicios. Si se dice esto o algo similar, entonces se está usando la palabra «juicio» en el mismo sentido que he conectado con la palabra «pensamiento», de modo que tendría que decir: «En un pensamiento hipotético se ponen recíprocamente en relación dos pensamientos». Esto sólo podría ser verdad si faltase un componente que indicase de manera indeterminada[11]; pero en ese caso no habría generalidad alguna.

Cuando ha de indicarse un instante de manera indeterminada en el antecedente y el consecuente de una oración condicional, esto ocurre frecuentemente por medio del mero

---

Schleswig-Holstein se haya separado alguna vez de Dinamarca. Éste no tendría a nuestra oración, concebida del primer modo, ni por verdadera ni por falsa, sino que le negaría cualquier referencia, puesto que la oración subordinada carece de ella. Esta última sólo daría, aparentemente, una determinación temporal. Si, por el contrario, concibiese nuestra oración de acuerdo con el segundo modo, encontraría expresado en ella un pensamiento que tendría por falso, junto a una parte que, para él carecería de referencia.

[11] A veces falta una indicación lingüística explícita y tiene que extraerse del contexto.

uso del tiempo presente del verbo que, en tal caso, no conlleva la designación del presente temporal. Esta forma gramatical es entonces el componente que indica de manera indeterminada en la oración principal y en la subordinada.
44 «Cuando / el Sol está en el trópico de Cáncer, tenemos el día más largo en el hemisferio norte» es un ejemplo de esto. Aquí es también imposible expresar el sentido de la subordinada en una principal, puesto que este sentido no es ningún pensamiento completo; pues si dijésemos: «El Sol está en el trópico de Cáncer», estaríamos designando nuestro presente y, con ello, alteraríamos el sentido. Aún menos es el sentido de la principal un pensamiento; sólo el todo compuesto de la oración principal y de la subordinada contiene tal pensamiento. Por lo demás, también se pueden indicar de manera indeterminada diversos componentes comunes del antecedente y el consecuente de una oración condicional.

Resulta obvio que oraciones nominales con «quien», «lo que» y oraciones adverbiales como «donde», «cuando», «dondequiera que», «cuandoquiera que» han de concebirse a menudo, según el sentido, como oraciones condicionales como, por ejemplo: «Quien anda con brea, se embadurna».

También las oraciones adjetivas pueden estar por oraciones condicionales. Así, podemos expresar también el sentido de nuestra oración mencionada anteriormente de la forma: «El cuadrado de un número que es menor que 1 y mayor que 0 es menor que 1 y mayor que 0».

El asunto es completamente distinto cuando el componente común de la oración principal y de la subordinada se designa mediante un nombre propio. En la oración:

> «Napoleón, que cayó en la cuenta del peligro para su flanco derecho, dirigió él mismo a su guardia contra la posición enemiga»,

se expresan dos pensamientos:

1. Napoleón cayó en la cuenta del peligro para su flanco derecho;
2. Napoleón dirigió él mismo a su guardia contra la posición enemiga.

Cuándo y dónde sucedió esto, ciertamente sólo se puede conocer a partir del contexto, pero por ello ha de contemplarse como determinado. Si emitimos toda la oración como una aserción, aseveramos con ella de modo simultáneo las dos oraciones componentes. Si una de ellas es falsa, entonces el todo es falso. Tenemos aquí el caso en el que la oración subordinada tiene por sí misma como sentido un pensamiento completo (si lo completamos con una indicación de tiempo y lugar). La referencia de la oración subordinada es, por consiguiente, un valor de verdad. Así pues, podemos esperar que, sin perjuicio de la verdad del todo, se pueda reem-
45 plazar por una oración con el / mismo valor de verdad. De hecho, éste es el caso; pero debe advertirse que, por razones puramente gramaticales, su sujeto tiene que ser «Napoleón», pues sólo entonces puede ponerse en la forma de una oración adjetiva que pertenezca a «Napoleón». Pero, si se prescinde de la exigencia de que tenga esa forma y se permite también la conexión por medio de «y», entonces esa restricción desaparece.

También en las subordinadas con «aunque» se expresan pensamientos completos. Esta conjunción no tiene ciertamente sentido alguno y tampoco cambia el sentido de la oración, sino que lo ilumina sólo de un modo peculiar[12]. De hecho, podríamos reemplazar, sin perjuicio alguno para la verdad del todo, la oración concesiva por otra con el mismo valor de verdad, pero la iluminación parecería entonces ligeramente inapropiada, como si una canción de contenido triste se quisiera cantar de manera alegre.

En los últimos casos la verdad del todo incluía la verdad de las oraciones que aparecían como partes. El asunto es distinto si una oración condicional expresa un pensamiento completo dado que contiene, en lugar de un componente que se limita a indicar, un nombre propio o algo que debe contemplarse como equivalente. En la oración

«Si ahora el Sol ya ha salido, entonces el cielo está muy nublado»

---

[12] Lo mismo tenemos en el caso de «pero» o «no obstante».

el tiempo es el presente, por tanto, determinado. También el lugar ha de pensarse como determinado. Puede decirse aquí que se ha establecido una relación entre los valores de verdad del antecedente y del consecuente, es decir: que no sucede el caso en el que el antecedente se refiere a lo verdadero y el consecuente a lo falso. De acuerdo con esto, nuestra oración es verdadera tanto si el Sol no ha salido ahora todavía, esté ahora el cielo muy nublado o no, como si el Sol ha salido ya y el cielo está muy nublado. Comoquiera que aquí sólo interesan los valores de verdad, se puede reemplazar cada una de las oraciones componentes por otra del mismo valor de verdad, sin alterar el valor de verdad del todo. Desde luego, también aquí sería inapropiada la iluminación en la mayoría de los casos; el pensamiento parecería ligera-
46 mente distorsionado; / pero esto no tiene nada que ver con su valor de verdad. En relación con esto, debe tenerse presente siempre que se suscitan pensamientos concomitantes que, sin embargo, no se expresan realmente y que, por tanto, no deben incluirse en el sentido de la oración, y por ello no se han de tomar en cuenta tampoco sus valores de verdad[13].

Con esto habrían quedado discutidos los casos más simples. Demos ahora un repaso a lo que hemos aprendido.

La oración subordinada no tiene como sentido, de modo general, un pensamiento, sino sólo una parte de él y, por consiguiente, no tiene como referencia ningún valor de verdad. La razón de esto reside o bien en que en la subordinada las palabras tienen su referencia indirecta, de modo que la referencia de la subordinada es un sentido y no un pensamiento, o bien en que la subordinada es incompleta dado que hay en ella un componente que indica sólo indeterminadamente, de modo que sólo expresa un pensamiento completo en combinación con la principal. Pueden también darse casos en los que el sentido de la oración subordinada es un pensamiento completo; entonces puede reemplazarse por otra con el mismo valor de verdad sin perjuicio de la

[13] El pensamiento de nuestra oración podría expresarse también así: «O el Sol no ha salido todavía, o el cielo está muy nublado», de donde puede inferirse cómo ha de comprenderse este género de conexión oracional.

verdad del todo, siempre que no existan impedimentos gramaticales.

Si, después de esto, uno examina todas las oraciones subordinadas con las que pueda encontrarse, se encontrará enseguida con algunas que no encajarán del todo en esas casillas. La razón de esto, hasta donde yo puedo ver, es que esas oraciones subordinadas no tienen un sentido tan simple. Parece que casi siempre, al emitir un pensamiento principal, asociamos con él pensamientos concomitantes que, aunque no son expresados, el oyente los vincula también con nuestras palabras en virtud de leyes psicológicas. Y puesto que tales pensamientos concomitantes aparecen asociados por sí mismos a nuestras palabras, casi como el propio pensamiento principal, también nosotros queremos expresar tal pensamiento concomitante. Con esto se vuelve más rico el sentido de la oración, y puede muy bien suceder que tengamos más pensamientos simples que oraciones. En más de un caso la oración debe entenderse de esta manera, en otros puede ser dudoso si el pensamiento concomitante pertenece al sentido
47 de la oración / o sólo lo acompaña[14]. Así, se podría quizás encontrar que, en la oración

> «Napoleón, que cayó en la cuenta del peligro para su flanco derecho, dirigió él mismo su guardia contra la posición enemiga»

no se habían expresado solamente los dos pensamientos indicados arriba, sino también el de que el caer en la cuenta del peligro fue la razón por la que dirigió la guardia contra la posición enemiga. De hecho puede dudarse sobre si este pensamiento se sugiere sólo ligeramente o se expresa realmente. Se nos presenta la cuestión de si nuestra oración sería falsa si la decisión de Napoleón hubiese sido tomada antes de apercibirse del peligro. Si nuestra oración pudiese, a pesar de esto, ser verdadera, entonces nuestro pensamiento concomitante no habrá de entenderse como parte del sentido

---

[14] Para la cuestión de si una aserción es una mentira o si o un juramento un perjurio, esto puede ser importante.

de nuestra oración. Probablemente, uno se decidiría por esta opción. En el otro caso la situación estaría bastante enredada: tendríamos entonces más pensamientos simples que oraciones. Si substituimos también ahora la oración

> «Napoleón cayó en la cuenta del peligro para su flanco derecho»

por otra con el mismo valor de verdad, por ejemplo, por

> «Napoleón tenía ya más de 45 años»,

se habría alterado con ello no sólo nuestro primer pensamiento, sino también nuestro tercero, y por ello podría cambiar su valor de verdad, es decir: si su edad no era la razón de la decisión de dirigir su guardia contra el enemigo. A partir de esto, puede percibirse por qué no siempre se pueden reemplazar entre sí las oraciones con el mismo valor de verdad. La oración expresa entonces, en virtud de su conexión con otra, más que por sí sola.

Consideremos ahora casos donde tal cosa sucede regularmente. En la oración

> «Bebel se imagina que la devolución de Alsacia-Lorena aplacará los deseos de venganza de Francia»

se expresan dos pensamientos de los que, sin embargo, el uno no pertenece al antecedente y el otro al consecuente. A saber:

1. Bebel cree que, mediante la devolución de Alsacia-Lorena se podrán aplacar los deseos de venganza de Francia;
48 2. Mediante la devolución de Alsacia-Lorena no podrán aplacarse los deseos de venganza de Francia.

En la expresión del primer pensamiento, las palabras de la oración subordinada tienen su referencia indirecta, mientras que las mismas palabras tienen su referencia habitual en la expresión del segundo pensamiento. Vemos a partir de esto que la subordinada de nuestra oración compuesta origi-

naria ha de tomarse ciertamente como doble con diferentes referencias, de las cuales una es un pensamiento, la otra un valor de verdad. Ahora bien, puesto que el valor de verdad no es la referencia total de la oración subordinada, no podemos simplemente reemplazar ésta por otra con el mismo valor de verdad. Sucede algo similar con expresiones como «saber», «darse cuenta», «se sabe».

Con una oración subordinada causal y su oración principal correspondiente, expresamos diversos pensamientos que, sin embargo, no corresponden a las oraciones tomadas de modo aislado. En la oración

«Puesto que el hielo es menos denso que el agua, flota en el agua»

tenemos:

1. El hielo es menos denso que el agua;
2. Si algo es menos denso que el agua, flota en el agua;
3. El hielo flota en el agua.

El tercer pensamiento no necesitaba quizás ser introducido explícitamente, puesto que está contenido en los dos primeros. En cambio, ni combinando el primero con el tercero ni el segundo con el tercero, se lograría el sentido de nuestra oración. Puede verse ahora que en nuestra oración subordinada

«puesto que el hielo es más denso que el agua»

se expresa tanto nuestro primer pensamiento como una parte de nuestro segundo. De aquí viene el que no podamos reemplazar sin más nuestra subordinada por otra con el mismo valor de verdad; pues con ello se alteraría también nuestro segundo pensamiento y podría fácilmente verse afectado también su valor de verdad.

El asunto es similar en la oración

«Si el hierro fuera menos denso que el agua, flotaría en el agua.»

49 Tenemos aquí los dos pensamientos siguientes: que el hierro no es menos denso que el agua, y que algo flota en el agua si es menos denso que el agua. La oración subordinada expresa de nuevo un pensamiento y una parte del otro.

Si entendemos la oración considerada anteriormente

«Después de que Schleswig-Holstein se separase de Dinamarca, Prusia y Austria se enemistaron»

de modo que exprese el pensamiento de que alguna vez Schleswig-Holstein se separó de Dinamarca, tenemos entonces, primero, este pensamiento y, segundo, el pensamiento de que en algún momento, que queda más estrechamente determinado mediante la oración subordinada, Prusia y Austria se enemistaron. Aquí también la oración subordinada expresa no sólo un pensamiento, sino también una parte de otro. De aquí que no se pueda, de manera general, reemplazar uno por otro con el mismo valor de verdad.

Es difícil agotar todas la posibilidades dadas en el lenguaje; a pesar de esto, espero haber encontrado, en lo esencial, las razones por las que una oración subordinada no siempre puede substituirse por otra con el mismo valor de verdad sin perjuicio de la verdad del todo constituido por la oración compuesta. Tales razones son:

1. Que la oración subordinada no se refiere a ningún valor de verdad, en tanto que sólo expresa una parte de un pensamiento;
2. Que la oración subordinada se refiere por cierto a un valor de verdad, pero no se limita a esto, en tanto que su sentido abarca también, además de un pensamiento, una parte de otro pensamiento.

El primer caso sucede

a) en la referencia indirecta de las palabras,
b) cuando una parte de la oración indica sólo de manera indeterminada, en lugar de ser un nombre propio.

En el segundo caso, la oración subordinada puede to-

marse doblemente, es decir: una vez en su referencia habitual, la otra en su referencia indirecta; o el sentido de una parte de la oración subordinada puede ser, al mismo tiempo, parte componente de otro pensamiento que, juntamente con el sentido expresado directamente en la subordinada, forma el sentido total de la oración principal y de la subordinada.

De aquí resulta con suficiente probabilidad que los casos en los que una oración subordinada no es reemplazable por otra con el mismo valor de verdad, no prueban nada en con-
50 tra de nuestra opinión de que / el valor de verdad es la referencia de la oración, cuyo sentido es un pensamiento.

Retornemos a nuestro punto de partida.

Si encontramos que, por lo general, el valor cognoscitivo de «$a = a$» y «$a = b$» es diferente, esto se explica diciendo que, para el valor cognoscitivo, el sentido de la oración, a saber: el pensamiento expresado por ella, no viene menos al caso que su referencia, esto es: su valor de verdad. Ahora bien, si $a = b$, entonces la referencia de «b» es ciertamente la misma que la de «a» y, por consiguiente, también el valor de verdad de «$a = b$» es el mismo que el de «$a = a$». Con todo, el sentido de «b» puede ser distinto del sentido de «a», y con ello también el pensamiento expresado en «$a = b$» será diferente del expresado por «$a = a$»; en ese caso, ambas oraciones tampoco tienen el mismo valor cognoscitivo. Si entendemos por «juicio», como lo hemos hecho más arriba, el avance del pensamiento a su valor de verdad, diremos también entonces que los juicios son diferentes.

COMENTARIOS SOBRE SENTIDO Y REFERENCIA*

128 En un artículo («Sobre sentido y referencia»[a]) distinguí entre sentido y referencia en primer lugar sólo para nombres propios (o, si se prefiere, para nombres singulares [*Einzelnamen*]). La misma diferencia puede hacerse para palabras para concepto. Ahora bien, es fácil que puedan surgir confusiones sobre este asunto si se entremezcla la división en conceptos y objetos con la distinción entre sentido y referencia, de tal manera que se haga que confluyan sentido y concepto por un lado y referencia y objeto por otro. A toda palabra para concepto o nombre propio le corresponde, regularmente, un sentido y una referencia, tal como uso estas palabras. En las obras de ficción, las palabras, como es natural, tienen sólo sentido, pero en la ciencia y allí dondequiera que nos ocupamos por la búsqueda de la verdad, no queremos contentarnos con el sentido, sino que también asociamos una referencia a los nombres propios y a las palabras para concepto; y si no lo hacemos así debido a, pongamos por caso, una inadvertencia, entonces estamos ante un error que puede arruinar fácilmente nuestra reflexión. La referencia de un

* Estos comentarios no se compusieron antes de 1892, el año en que apareció el artículo «Über Sinn und Bedeutung», y no más tarde de 1895. Son parte de un manojo de papeles titulado «Schrödersche Logik» que existía de una forma completa antes de la destrucción del *Nachlass*. La primera parte de estos papeles constituían un bosquejo del artículo de Frege «Kritische Beleuchtung einiges Punkte in E. Schröder's *Vorlesungen über die Algebra del Logik*». Se publicó por primera vez en Gottlob Frege, *Nachgelassene Schriften*, editados por H. Hermes, F. Kambartel y F. Kaulbach, con la ayuda de G. Gabriel y W. Rödding, Felix Mainer, Hamburgo, 1969, pp. 128-136. En él se trata la cuestión de que la distinción entre sentido y referencia se aplica también a las palabras para concepto y otras expresiones funcionales.

[a] Cf. pp. 84-111 de este volumen.

nombre propio es el objeto que designa o nombra. Una palabra para concepto se refiere a un concepto si la palabra se usa de la manera en que es conveniente en lógica. Para clarificar esto, recordaré una circunstancia que parece hablar muy a favor de los lógicos extensionales y en contra de los intensionales, a saber: que en cualquier oración podemos, sin perjuicio de la verdad, substituir una palabra para concepto por otra si a ambas les corresponde la misma extensión conceptual; de este modo, también en relación con la inferencia y las leyes lógicas, los conceptos sólo se comportan de maneras diferentes en la medida en que sus extensiones son diferentes. La relación lógica fundamental es la de caer un objeto bajo un concepto: a ésta se pueden reducir todas las relaciones entre conceptos. Si un objeto cae bajo un concepto, cae bajo todos los conceptos de la misma extensión, de donde se sigue lo dicho anteriormente. Así como los nombres propios del mismo objeto pueden substituirse uno por otro sin perjuicio de la verdad, lo mismo vale también para las palabras para concepto si su extensión es la misma.
129 Naturalmente, con tales reemplazos / cambiará el pensamiento; pero éste es el sentido de la oración, no su referencia[1]. Ésta, sin embargo, que es el valor de verdad, permanece inalterada. Resulta fácil entonces que uno llegue a tomar la extensión del concepto por la referencia de la palabra para concepto; hacer esto, sería, sin embargo, pasar por alto que las extensiones de conceptos son objetos y no conceptos (cf. mi artículo «Función y concepto»[b]). En todo caso, hay en esta posición un cierto núcleo de verdad. Para hacerlo manifiesto más claramente debo tomar como punto de partida lo que he dicho en mi folleto sobre función y concepto. El concepto es, según lo dicho, una función de un argumento, cuyo valor es siempre un valor de verdad. Tomo aquí la palabra «función» del análisis y la uso, preservando lo que le es esencial, con una referencia algo más amplia, algo de lo que hay precedentes en la misma historia del análisis. Un nombre de función tiene siempre lugares vacíos (al menos uno) para el argumento, que en el análisis se indican, de

---

[1] Cf. mi artículo «Sobre sentido y referencia», pp. 84-111 en este volumen.
[b] «Función y concepto», pp. 53-79 de este volumen.

manera general, mediante la letra «*x*», que llena esos lugares vacíos. Pero el argumento no ha de considerarse como algo que pertenece a la función y, por consiguiente, tampoco ha de considerarse que la letra «*x*» pertenece al nombre de la función; de este modo siempre puede hablarse respecto de este último de lugares vacíos, en la medida en que, en rigor, lo que los llena no les pertenece. De acuerdo con lo anterior, llamo a la función misma insaturada o necesitada de compleción, puesto que su nombre tiene que completarse por el signo de un argumento para obtener una referencia completa. Llamo a tal referencia completa objeto y, en nuestro caso, valor de la función para el argumento que realiza la compleción o saturación. En los casos que se nos presentan en primera instancia el propio argumento es un objeto; y en principio vamos a limitarnos aquí a esos casos. Por lo que toca al concepto, tenemos el caso especial de que el valor es siempre un valor de verdad. Esto es: si completamos un nombre de concepto mediante un nombre propio, obtenemos una oración cuyo sentido es un pensamiento; y a ella le corresponde como referencia un valor de verdad. Si reconocemos que éste es el de lo verdadero (si lo reconocemos como lo verdadero), juzgamos que el objeto tomado como argumento cae bajo el concepto. Lo que, en el caso de la función, llamamos instauración, podemos llamarlo, el caso
130 del concepto, su naturaleza predicativa[2]. Ésta / se muestra incluso también cuando se habla de un sujeto conceptual. («Todos los triángulos equiláteros son equiángulos»; es decir: «Si algo es triángulo equilátero, entonces es triángulo equiángulo».)

Ahora bien, esta esencia del concepto, constituye un gran obstáculo para la expresión adecuada y para la comprensión. Cuando quiero hablar de un concepto, el lenguaje me obliga, con una fuerza casi irresistible, a usar una expresión inadecuada que obscurece —casi podría decir que falsea— el pensamiento. Cuando digo «el concepto de *triángulo equi-*

---

[2] Las palabras «insaturado» y «predicativo» parecen encajar mejor con el sentido que con la referencia; pero con todo tiene que corresponderles algo también en la referencia; y no conozco palabras más apropiadas.

Cf. la *Lógica* de Wundt.

látero» se podría suponer, por analogía con otras expresiones lingüísticas, que con ello designo un concepto del mismo modo que, si duda, designo un planeta cuando digo «el planeta Neptuno». Pero esto no es el caso, pues falta la naturaleza predicativa. De aquí que la referencia de la expresión «el concepto *triángulo equilátero*» (en la medida en que exista) sea un objeto. No podemos prescindir de palabras como «el concepto», pero tenemos que ser siempre conscientes de su inadecuación[3]. De lo dicho resulta que objetos y conceptos son fundamentalmente distintos y no se pueden substituir unos por otros. Lo mismo vale para las palabras o signos correspondientes. Los nombres propios no pueden usarse realmente como predicados. Allí donde esto parece ser así, una consideración más detallada nos enseña que su sentido es tal que sólo son una parte del predicado: los conceptos no pueden estar en las mismas relaciones que los objetos. Pensarlos en tales relaciones no sería falso, sino imposible. De ahí que las palabras «relación del sujeto con el predicado» designen dos relaciones completamente distintas, dependiendo de que el sujeto sea un objeto o un concepto. Por ello, lo mejor sería desterrar completamente de la lógica las palabras «sujeto» y «predicado», puesto que nos llevan una y otra vez a confundir las dos relaciones fundamentalmente diferentes de caer un objeto bajo un concepto y [de la] subordinación de un concepto bajo otro concepto. Las palabras «todos» y «algunos», que van con el sujeto gramatical, pertenecen, por lo que respecta al sentido, al predicado gramatical, como se percibe cuando se pasa a la negación (no todos, *nonnulli*). Solamente de esto se sigue sin más que, en estos casos, el predicado es distinto de lo que enunciamos de un objeto. Del mismo modo, la relación de igual-
131 dad, / por la que entiendo coincidencia total, identidad, sólo es pensable entre objetos, no entre conceptos. Cuando decimos, «La referencia de la palabra para concepto "sección cónica" es la misma que la de la palabra para concepto "curva de segundo orden"» o «El concepto *sección cónica* coincide con el concepto *curva de segundo orden*», las palabras

[3] Me ocuparé de esta dificultad.

«referencia de la palabra para concepto "sección cónica"» son el nombre de un objeto, no de un concepto; pues carecen de naturaleza predicativa, de insaturación, de la posibilidad de ser usadas con el artículo indeterminado. Lo mismo vale de las palabras «el concepto *sección cónica*». Pero, aunque la relación de igualdad sólo es pensable entre objetos, se da una relación similar entre conceptos que llamo, al ser una relación entre conceptos, relación de segundo nivel, mientras que a la primera igualdad la llamo relación de primer nivel. Decimos que un objeto *a* es igual a un objeto *b* (en el sentido de coincidencia total), si *a* cae bajo todo concepto bajo el que cae *b*, y viceversa. Obtenemos algo que corresponde a esto para los conceptos si concepto y objeto intercambian sus papeles. Podríamos decir entonces que la relación en la que hemos pensado más arriba se da entre el concepto Φ y el concepto X, si cada objeto que cae bajo Φ, cae también bajo X, y viceversa. Naturalmente, al decir esto no hemos podido prescindir tampoco de las expresiones «el concepto Φ», «el concepto X», por lo que de nuevo se obscurece el sentido genuino. Por tanto, voy a añadir, para los lectores que no se asustan de la conceptografía, lo siguiente: la insaturación del concepto (de primer nivel) se representa en la conceptografía de modo que su designación contiene al menos un lugar vacío para acoger el nombre de un objeto que ha de caer bajo el concepto del que se trate. Este lugar o estos lugares tienen que rellenarse siempre de una u otra manera. Esto puede suceder, además de mediante un nombre propio, por medio de un signo que sólo indique un objeto. Puede verse a partir de esto que a un lado de un signo de igualdad, o de un [signo] similar, jamás puede estar sólo la designación de un concepto, sino que, además del concepto, siempre tendrá que designar o indicar un objeto. Incluso cuando sólo indicamos conceptos de manera esquemática mediante una letra de función, esto sólo puede suceder si la insaturación se presenta por medio de un lugar vacío que va con la letra, como en $\Phi(\ )$ y $X(\ )$. Con otras palabras: tenemos siempre que usar las letras (Φ, X), que indican o designan conceptos, sólo como letras de función: de tal manera que vayan acompañadas de un lugar para el argumento (el espacio encerrado entre los paréntesis que las siguen). Por consiguiente, no se de-

132 bería escribir / $\Phi = X$, puesto que aquí las letras Φ y X no hacen el papel de letras funcionales. Pero tampoco se debería escribir $\Phi(\ ) = X(\ )$, puesto que los lugares de argumento tienen que estar rellenos. Pero, si se rellenan, entonces no sólo se igualan entre sí las funciones (conceptos), sino que a cada lado del signo de igualdad hay algo, aparte de la letra de función, que no pertenece a la función.

Estas letras no pueden reemplazarse por otras que no se usen como letras de función. Tiene que haber siempre un lugar de argumento para acoger la «α«. A uno podría ocurrírsele escribir simplemente $\Phi = X$. Esto podría parecer tolerable en la medida en que los conceptos se indiquen esquemáticamente; pero un modo de designación que sea verdaderamente adecuado tiene que convenir a todos los casos. Veamos un ejemplo que he utilizado ya en mi escrito «Función y concepto».

La función $x^2 = 1$ tiene para cada argumento el mismo valor (de verdad) que la función $(x + 1)^2 = 2(x + 1)$; es decir: bajo el concepto *raíz cuadrada de 1* cae todo objeto que cae bajo el concepto *lo que es menor en 1 que un número cuyo cuadrado es igual a su doble*, y viceversa. Expresaríamos este pensamiento, en el modo indicado arriba, de la siguiente manera:

$$\alpha^2 = 1 \overset{\alpha}{\asymp} ((\alpha + 1)^2 = 2(\alpha + 1)).$$

Lo que tenemos aquí en realidad es esa relación de segundo nivel que corresponde a, pero que no ha de confundirse con, la igualdad (coincidencia completa) entre objetos. Si escribimos $\smile\!\!\mathfrak{a}\!\!-$ $(\mathfrak{a}^2 = 1) = ((\mathfrak{a} + 1)^2 = 2(\mathfrak{a} + 1))$, hemos expresado esencialmente el mismo pensamiento, concebido como la generalización de una ecuación entre valores de funciones. Tenemos aquí la misma relación de segundo nivel; tenemos también el signo de igualdad; pero esto no es suficiente por sí sólo para designar esta relación, sino que sólo puede hacerse en conexión con la designación de generalización: lo que tenemos es, ante todo, una generalización, no una ecuación. En $\grave{\varepsilon}(\varepsilon^2 = 1) = \grave{\alpha}((\alpha + 1)^2 = 2(\alpha + 1))$ tenemos ciertamente una ecuación, pero no entre conceptos (que es imposible), sino entre objetos, es decir: extensiones de conceptos.

Hasta aquí, nos hemos dado cuenta de que la relación de igualdad entre objetos no puede concebirse como algo que se da también entre conceptos, aunque hay una relación entre éstos que se corresponde con aquéllos. La expresión «el mismo», que se usa para designar esa relación entre objetos, no puede servir, en rigor, para designar la que se da entre conceptos. Para este propósito casi no nos queda más que
133 decir «el concepto Φ es el mismo que el / concepto *X*», con lo cual nombramos ciertamente una relación entre objetos[4], allí donde intentábamos nombrar una relación entre conceptos. Tenemos el mismo caso cuando decimos «La referencia de la palabra para concepto *A* es la misma que la de la palabra para concepto *B*». En rigor, habría que proscribir la expresión «la referencia de la palabra para concepto *A*», puesto que el artículo determinado antes de «referencia» apunta hacia un objeto y desmiente la naturaleza predicativa del concepto. Sería mejor decir «aquello a lo que se refiere la palabra para concepto *A*»; pues ésta ha de usarse en cualquier caso predicativamente: «Jesús es aquello a lo que se refiere la palabra para concepto "hombre"» en el sentido de «Jesús es un hombre».

Si no perdemos de vista todo esto, estaremos ciertamente en condiciones de aseverar «Aquello a lo que se refieren dos palabras para concepto es lo mismo si y sólo si las extensiones de los conceptos correspondientes coinciden», sin ser inducidos a error por el uso inapropiado de la expresión «lo mismo». Y con esto se ha hecho, según creo, una significativa concesión a los lógicos extensionales. Tienen razón, cuando dan a conocer su preferencia por la extensión de los conceptos frente a su contenido, el que consideren esencial para la lógica la referencia de las palabras, no el sentido. Los lógicos intensionales se contentan con limitarse al sentido; pues lo que llaman contenido es, si no representación, sentido. No se dan cuenta de que en la lógica no interesa cómo unos pensamientos resultan de otros sin tener en cuenta el valor de verdad; que hay que dar el paso del pensa-

[4] Estos objetos tienen como nombres «el concepto Φ» y «el concepto *X*».

miento al valor de verdad, más generalmente, el paso del sentido a la referencia; que las leyes de la lógica son, ante todo, leyes que pertenecen al reino de la referencia y que sólo se relacionan indirectamente con el sentido. Si nos interesa la verdad —y es hacia la verdad hacia donde se dirige la lógica—, hay que preguntarse por las referencias, hay que proscribir los nombres propios que no designan o nombran ningún objeto, por mucho que puedan tener un sentido; hay que proscribir las palabras para concepto que no tengan referencia. Tales conceptos no son los que, pongamos por caso, asocian cosas contradictorias —pues un concepto puede perfectamente ser vacío—, sino aquellos cuyo límite es borroso. Tiene que estar determinado para todo objeto si cae o no bajo un concepto; una palabra para concepto que no satisface esta exigencia por lo que respecta a su referencia, carece de ella. A esta clase pertenece, por ejemplo, la palabra μῶλυ[c] (Homero, *Odisea*, X, 305), aunque es cierto que se dan algunas de sus características. Ahora bien, no por esto tiene que carecer de sentido este pasaje de la obra, como tampoco aquellos en los que aparece el nombre «Nausicaa»[d] que, verosímilmente, ni tiene referencia ni nombra nada. Pero hace como si nombrara a una mucha-
134 cha, y con esto se asegura un sentido. Y en el caso de las obras de ficción basta / el sentido, el pensamiento aunque no tenga referencia; pero esto no es suficiente para la ciencia.

En mis *Grundlagen* y en la conferencia «Über formale Theorien der Arithmetik»[e] he mostrado que para ciertas pruebas no es en absoluto indiferente el si una combinación de signos —por ejemplo $\sqrt{-1}$— tiene o no una re-

[c] Se trata de una planta de «raíz negra y flor blanca como la leche» que Hermes le dio a Ulises para que pudiese sortear los peligros que le acechaban en el palacio de Circe, donde estaban encerrados sus compañeros.

[d] Hija de Alcinoo, rey de los feacios. Encontró a Ulises náufrago en las costas de su isla y fue la responsable de la extraordinaria acogida dispensada a Ulises en el reino de su padre.

[e] «Über formale Theorien der Atithmetik» («Sobre las teorías formales de la aritmética»), *Jenaische Zeitschrift für Naturwissenschaft*, XIX (1886), suplemento, pp. 94-104.

ferencia[5], es más: muchas veces toda la fuerza de la prueba se mantiene en el caso de que la tenga y se derrumba si no la tiene. Así pues, la referencia resulta ser en todas partes algo esencial para la ciencia. Por consiguiente, aunque pueda concedérseles a los lógicos intensionales que, comparado con su extensión, el concepto mismo es lo primario, no debe concebirse éste como el sentido de la palabra para concepto, sino como la referencia, y los lógicos extensionales se acercan más a la verdad en la medida en que declaran que, en la extensión, lo esencial es una referencia que, ciertamente, no es el concepto mismo, pero que tiene una conexión muy estrecha con él.

El Sr. Husserl[f] censura la poca claridad de Schröder al discutir las palabras «*unsining*» [sin sentido], «*einsinning*» [con un sólo sentido], y «*mehrsinning*» [con más de un sentido], «*undeutig*» [sin referencia], «*eindeutig*» [con sólo una referencia], «*mehrdeutig*» [con más de una referencia] (pp. 48 ss. y 69), y hay de hecho aquí poca claridad; pero tampoco Husserl distingue de manera suficiente. Como era de esperar, el Sr. Schröder utiliza las raíces «*sinning*» y «*deutig*» de manera distinta a la mía; sobre esto no he de hacerle ningún reproche, tanto menos cuanto que al publicarse su obra yo todavía no había dado nada a la imprenta sobre este asunto. Para él, esta diferencia está conectada con la que hay entre nombres comunes y nombres propios, y la falta de claridad es resultado de una deficiente concepción de la diferencia entre concepto y objeto. Para él, los nombres comunes pueden, sin que esto sea defecto alguno, tener más de una
135 referencia y ciertamente la tienen cuando / bajo el concepto correspondiente cae más de un objeto[6]. De acuerdo con esto,

---

[5] En cualquier caso, todavía no había fijado el uso que ahora he dado a las palabras «sentido» y «referencia», de modo que algunas veces he dicho «sentido» donde ahora debería decir «referencia».

[f] Se refiere Frege aquí a la recensión hecha por Husserl de la obra de Schröder *Verlesungen über der Logik (Exact Logik)*, I, Leipzig, 1890, que apareció en *Göttingschen Anzeigen*, abril de 1891, pp. 243-278.

[6] Si, como dice Husserl en la nota de la página 252, un nombre distributivo es aquel «cuya referencia consiste en designar una cosa cualquiera de una pluralidad», entonces una palabra de concepto (un nombre común) no es en ningún caso un nombre distributivo.

un nombre común podría también carecer de referencia [*undeutig*] sin que esto fuese error alguno, como, por ejemplo, «cuadrado redondo». Pero Schröder lo denomina también sin sentido, con lo que es infiel a su propia manera de hablar; pues, de acuerdo con esto, de «cuadrado redondo» debería decirse que tiene un sentido, y Husserl tiene razón cuando lo llama nombre común unívoco; pues «unívoco» y «equívoco» corresponden a «con un sólo sentido» y «con más de un sentido» de Schröder. Husserl dice (p. 250): «Obviamente, confunde aquí dos cuestiones muy diferentes, a saber: 1) la de si a un nombre le corresponde una referencia [*Bedeutung*] (un «sentido» [*Sinn*]); y 2) la de si existe o no un objeto que le corresponda al nombre.» Esta distinción no es adecuada. La palabra «nombre común» induce a la suposición de que el nombre común se relaciona con objetos de un modo esencialmente igual que el nombre propio, sólo que éste nombra sólo a uno, mientras que aquél es aplicable, en general, a más de uno. Pero esto es falso, y por ello prefiero decir «palabra para concepto» en lugar de «nombre común». El nombre propio tiene que tener por lo menos un sentido (tal como utilizo la palabra); de lo contrario sería una secuencia vacía de sonidos y no tendríamos razón alguna para llamarlo nombre. Pero para el uso científico ha de exigirse que tenga también una referencia; que designe o nombre un objeto. Así pues, el nombre propio se relaciona por medio del sentido, y sólo por medio de él, con el objeto.

También la palabra para concepto tiene que tener un sentido y, para el uso científico, una referencia; pero ésta no consiste en un objeto ni tampoco en una pluralidad de ellos, sino que es un concepto. Por lo que respecta al concepto se puede, naturalmente, preguntar de nuevo si bajo él cae un objeto, o más de uno o ninguno. Pero esto tiene que ver, de manera directa, sólo con el objeto. De este modo, una palabra para concepto puede ser, lógicamente hablando, absolutamente impecable, sin que haya un objeto con el que se relacione por medio de su sentido y su referencia (el concepto mismo). Esta relación con un objeto es, como puede verse, más indirecta e inesencial, de modo que parece poco ajustado dividir las palabras para concepto teniendo en cuenta si bajo el concepto correspondiente no cae ningún objeto, o

cae uno o más de uno. La lógica tiene que exigir tanto del nombre propio como de la palabra para concepto que el paso
136 de la / palabra al sentido y del sentido a la referencia esté determinado sin posibilidad alguna de duda. De lo contrario, no deberíamos tener derecho a hablar de referencia. Esto vale, naturalmente, para todos los signos y combinaciones de signos, que tienen la misma finalidad que los nombres propios o las palabras para concepto.

SOBRE CONCEPTO Y OBJETO*

192 En una serie de artículos publicados en esta revista sobre la intuición y su elaboración psíquica, Benno Kerry ha hecho referencia varias veces a mis *Fundamentos de la Aritmética* y a otros de mis escritos, mostrando su aprobación una veces e impugnándolos otras. Esto sólo puede ser para mí motivo de satisfacción, y creo que la mejor manera de mostrar mi agradecimiento es asumir la discusión de los puntos que él impugna. Esto me parece que es tanto más necesario cuanto que su oposición se basa, al menos en parte, en una mala comprensión, que podría ser compartida por otros, de lo que he dicho sobre el concepto, y también porque este asunto es suficientemente importante y difícil para que, independientemente de esta ocasión especial, sea tratado más a fondo de lo que me pareció conveniente en mis *Grundlagen*.

La palabra «concepto» se usa de modos distintos, unas veces en un sentido psicológico, otras en un sentido lógico y otras quizás en una mezcla poco clara de ambos. Esta libertad de la que en la actualidad se goza encuentra su limitación natural en la exigencia de que, una vez que se ha adoptado el modo de usar la palabra, éste se mantenga invariable. Por mi parte, he decidido hacer, de manera estricta, un uso puramente lógico. La cuestión de si el uso más adecuado es éste o aquél me gustaría dejarla de lado pues la considero de menor importancia. Será fácil ponerse de acuerdo sobre el modo de expresión, una vez que se haya reconocido que hay algo que merece una denominación especial.

---

* Publicado originalmente como «Über Begriff und Gegenstand», *Vierteljahrsschrift für wissenschaftliche Philosophie*, 16, 1892, pp. 192-205. El punto de partida es la controversia entre Frege y el matemático Benno Kerry, que había hecho una recensión de los *Fundamentos*. El principal punto de discusión es si una y la misma cosa puede ser a la vez concepto y objeto.

Me parece que la mala comprensión de Kerry se produce porque confunde sin querer su propia manera de usar la palabra «concepto» con la mía. De aquí brotan fácilmente contradicciones que no se pueden imputar a mi modo de usar dicha palabra.

193 Kerry impugna lo que llama mi definición de concepto. Ante todo, me gustaría hacer la observación de que mi explicación no pretendía ser una definición propiamente dicha. Tampoco se puede exigir que se defina todo, del mismo modo que no se puede exigir al químico que descomponga todas las substancias. Lo que es simple no puede descomponerse, y lo que es lógicamente simple no puede definirse genuinamente. Ahora bien, lo lógicamente simple, no menos que la mayor parte de los elementos químicos, no es algo que venga dado desde el principio, sino que sólo se alcanza mediante el trabajo científico. Si se encuentra algo que es simple o que, por lo menos hasta el momento, ha de pasar como simple, habrá de acuñarse una denominación para ello, puesto que el lenguaje no tendrá originalmente una expresión que le corresponda de manera exacta. No es posible una definición para la introducción de un nombre para algo lógicamente simple. No queda otra cosa que guiar al lector o al oyente, por medio de indicaciones indirectas, hacia la comprensión de lo que se quiere decir con la palabra.

Kerry no querría que la distinción entre concepto y objeto valiese de modo absoluto. Dice: «En un pasaje anterior yo mismo he expresado el punto de vista de que la relación entre el contenido del concepto y el objeto del concepto es, en cierto modo, peculiar e irreductible; pero en modo alguno hemos ligado a esto el punto de vista de que las propiedades: ser un concepto y ser un objeto se excluyen mutuamente; el último punto de vista no se sigue en absoluto del primero, del mismo modo que si la relación entre padre e hijo fuera irreductible, no se seguiría que alguien no pudiese ser al mismo tiempo padre e hijo (aunque desde luego no, por ejemplo, padre de aquel de quien es hijo).»

¡Agarrémonos a esta analogía! Si hubiera o hubiese habido seres que efectivamente fuesen padres, pero que no pudieran ser hijos, tales seres serían obviamente de un género completamente distinto del de todos los hombres que son hi-

jos. Ahora bien, aquí ocurre algo similar. El concepto —tal como yo entiendo la palabra— es predicativo[1]. Por el contrario, un nombre de objeto, un nombre propio, es totalmente incapaz de ser usado como predicado gramatical. Esto, es cierto, necesita una elucidación para no parecer falso. ¿No puede afirmarse perfectamente de algo que es Alejandro Magno, el número 4 o el planeta Venus, del mismo modo que se puede afirmar de algo que es verde o que es un mamí-
194 fero? / Si se piensa esto, entonces no se distinguen los usos de la palabra «es». En los dos últimos ejemplos hace de cópula, como un mero recurso formal de la afirmación. Como tal [la palabra alemana «*ist*»] puede substituirse a veces por un mero sufijo personal. Compárense, por ejemplo, «*Dieses Blatt is grün*» [«Esta hoja es verde»] y «*Dieses Blatt grün*» [«Esta hoja verdea»]. Decimos entonces que algo cae bajo un concepto, y el predicado gramatical se refiere a ese concepto. Por el contrario, en los primeros tres ejemplos el «es» se usa del mismo modo que en aritmética el signo de igualdad, para expresar una ecuación[2]. En la oración «El lucero de la mañana es Venus» tenemos dos nombres propios, «el lucero de la mañana» y «Venus» para el mismo objeto. En la oración «El lucero de la mañana es un planeta», tenemos un nombre propio, «el lucero de la mañana», y una palabra para concepto, «un planeta». Es cierto que, lingüísticamente, no ha sucedido sino que «Venus» se ha substituido por «un planeta»; pero, en realidad, la relación se ha convertido en algo completamente distinto. Una ecuación es reversible; el caer un objeto bajo un concepto es una relación no reversible. El «es» de la oración «El lucero de la mañana es Venus», no es obviamente la mera cópula, sino que, por lo que respecta a

---

[1] A saber: es la referencia de un predicado gramatical.

[2] Uso la palabra «igual» y el signo «=» en el sentido de «lo mismo que», «no otro que», «idéntico a». Cf. E. Schöreder, *Vorlesungen über die Algebra der Logik* [*Conferencias sobre el álgebra de la lógica*] (Leipzig, 1890), vol. 1, §1, donde, sin embargo, ha de censurarse que no se distinga entre dos relaciones fundamentalmente distintas tales como la de caer un objeto bajo un concepto y la de subordinación de un concepto a otro concepto. Las observaciones sobre la *Vollwurzel* [raíz total] son también susceptibles de reproche. El signo ⋹ de Schöreder no está simplemente por la cópula.

su contenido, es una parte esencial del predicado, de modo que en la palabra «Venus» no está contenido todo el predicado[3]. Alternativamente, podría decirse: «El lucero de la mañana no es otro que Venus», y aquí tenemos, descompuesto en cuatro palabras, lo que antes estaba en el simple «es» y en «no es otro que» «es» no es ahora realmente nada más que la cópula. Lo que se ha afirmado aquí no es, por tanto, *Venus* sino *no es otro que Venus*. Estas palabras se refieren a un concepto bajo el que, naturalmente, sólo cae un objeto. Pero tal concepto ha de distinguirse siempre del objeto[4]. Tenemos aquí una palabra: «Venus», que nunca puede ser un predica-
195 do genuino, si bien / puede formar parte de un predicado. La referencia[5] de esta palabra no puede actuar nunca como concepto, sino sólo como objeto. Ni siquiera Kerry querría discutir que hay algo de este género. Pero con esto se habría admitido una distinción, cuyo reconocimiento es muy importante, entre lo que sólo puede actuar como sujeto y todo lo demás. Y esta distinción no se borraría si fuese verdad, como Kerry opina, que hay conceptos que también pueden ser objetos. Ahora bien, hay realmente casos que parecen apoyar este punto de vista. Yo mismo he indicado (*Grundlagen*, §53, al final), que un concepto puede caer bajo uno superior, algo que, sin embargo, no ha de confundirse con la subordinación de un concepto respecto de otro. Kerry no apela a esto, sino que da el ejemplo siguiente: «El concepto "caballo" es un concepto fácilmente alcanzable», y opina que el concepto «caballo» es un objeto, y, ciertamente, uno de los objetos que caen bajo el concepto «fácilmente alcanzable». ¡Totalmente correcto! Las tres palabras «el concepto "caballo"» designan un objeto, pero precisamente por eso no designan ningún concepto, tal como yo uso la palabra. Esto está completamente de acuerdo con la caracterización[6] que he dado, según la cual el artículo determinado singular siempre señala un objeto, mientras que el indeterminado

---

[3] Cf. mis *Grundlagen* [*Los fundamentos de la aritmética*], §66, nota.
[4] Cf. mis *Grundlagen*, §51.
[5] Cf. mi ensayo «Über Sinn un Bedeutung», que aparecerá dentro de poco en el *Zeitschrift für Phil. u. phil. Kritik* [pp. 84-111 de este volumen].
[6] *Grundlagen*, §51, §56, nota §68, nota, p. 80.

acompaña a una palabra para concepto. Ciertamente, Kerry opina que ninguna estipulación lógica puede fundamentarse en distinciones lingüísticas; pero del modo que yo lo hago, nadie que haga tales estipulaciones puede evitarlo, puesto que sin el lenguaje no podemos entendernos y por eso dependemos en última instancia de la confianza en que el otro entiende las palabras, las formas y los modos de construir oraciones, esencialmente de la misma manera que nosotros mismos. Como se ha dicho antes: no quería definir, sino sólo dar indicaciones indirectas, a la vez que apelaba al sentimiento común de la lengua alemana. Me viene de perlas, el que la diferencia lingüística concuerde tan bien con la real. Por lo que respecta al artículo indeterminado, apenas se podría consignar ninguna excepción a nuestra regla, a no ser en fórmulas arcaicas como «*Ein edler Rat*» [Consejero]. El asunto no es tan fácil en el caso del artículo determinado, es-
196 pecialmente en plural; pero / mi caracterización no se relaciona con ese caso. Por lo que respecta al singular, el asunto, según me parece, sólo es dudoso cuando éste está en lugar del plural, como en las oraciones: «El turco puso sitio a Viena», «El caballo es un animal cuadrúpedo». Estos casos se reconocen tan fácilmente como casos especiales que el hecho de que ocurran apenas hace perder valor a nuestra regla. Resulta claro que en la primera oración «el turco» es el nombre propio de un pueblo. La segunda oración se entiende de manera más adecuada como expresión de un juicio universal, como «Todos los caballos son animales cuadrúpedos» o «Todos los caballos constituidos de manera adecuada son cuadrúpedos», de lo cual se hablará más adelante[7]. Ahora

[7] En la actualidad se tiende, a lo que parece, a exagerar el alcance de la afirmación de que diferentes expresiones lingüísticas jamás son totalmente equivalentes y la de que una palabra jamás puede traducirse a otro lenguaje distinto. Quizás se podría ir más allá y decir que ni siguiera la misma palabra se comprende de modo totalmente igual por los hombres que comparten una misma lengua. No voy a investigar cuánto hay de verdad en esas afirmaciones, sino que sólo quiero poner de relieve que, a pesar de todo, no son pocas las veces que hay algo en común en expresiones diferentes; lo que yo llamo el sentido y, para las oraciones asertóricas en particular, el pensamiento; dicho con otras palabras: no debemos dejar de reconocer que el mismo sentido, el mismo pensamiento, puede expresarse de maneras distintas; por consiguiente, la diferencia no lo es del sentido,

bien, cuando Kerry dice que mi caracterización es inexacta, aseverando él que en la oración «El concepto del que estoy hablando ahora, es un concepto individual», el nombre integrado por las siete primeras palabras se refiere ciertamente a un concepto, de modo que no entiende la palabra «concepto» en mi sentido, y la contradicción no reside en mis estipulaciones. Pero nadie puede exigir que mi modo de expresión tenga que coincidir con el de Kerry.

No puede dejar de tenerse en cuenta, que hay aquí una dificultad lingüística que, evidentemente, es inevitable, cuando aseveramos que el concepto *caballo* no es un concepto[8],
197 mientras que, por ejemplo, la / ciudad de Berlín es una ciudad y el volcán Vesubio es un volcán. El lenguaje se encuentra aquí en un aprieto, que justifica el que se desvíe de lo habitual. El propio Kerry nos indica que el uso que nos traemos entre manos es especial al poner entre comillas la palabra «caballo» —yo uso cursivas con la misma finalidad. No había razón alguna para señalar la palabra «Berlín» y «Vesubio» de manera similar. En las investigaciones lógicas se tiene a menudo la necesidad de enunciar algo sobre un concepto, y además vestirlo de la forma habitual para tales enunciados, es decir: que lo que se enuncia sea el contenido del predicado gramatical. Por consiguiente, se esperaría que el concepto fuese la referencia del sujeto gramatical; pero el concepto, debido a su naturaleza predicativa, no puede aparecer así sin más, sino que tiene que transformarse en un objeto[9] o,

---

sino sólo de la captación, iluminación, o coloración del sentido, y esto no entra en consideración para la lógica. Es posible que una oración no dé ni más ni menos información que otra; pero, a pesar de toda la multiplicidad de lenguajes, la humanidad tiene un tesoro común de pensamientos. Si se quisiera prohibir toda transformación de la expresión con la excusa de que con ello se alteraría también el contenido, la lógica quedaría simplemente paralizada, pues su tarea es ciertamente irrealizable si uno no se esfuerza en reconocer una y otra vez el pensamiento bajo su múltiples ropajes. Además, cualquier definición habría de rechazarse como falsa.

[8] Algo similar sucede cuando decimos, respecto de la oración «Esta rosa es roja», el predicado gramatical «es roja» pertenece al sujeto «esta rosa». Las palabras «el predicado gramatical "es roja"» no son aquí predicado gramatical, sino sujeto. Justamente por el hecho de llamarlo explícitamente predicado, le robamos esa propiedad.

dicho de una manera más precisa, tiene que estar representado por un objeto, que designamos poniéndole delante la palabra «el concepto»; por ejemplo,

«El concepto *hombre* no es vacío».

Aquí las tres primeras palabras han de entenderse como un nombre propio[10] que, al igual que «Berlín» o «Vesubio», no pueden utilizarse predicativamente. Cuando decimos: «Jesús cae bajo el concepto *hombre*», el predicado es (dejando a un lado la cópula)

«algo que cae bajo el concepto *hombre*»,

y esto tiene la misma referencia que

«un hombre».

Sin embargo, la combinación de palabras

«el concepto *hombre*»

es sólo una parte de ese predicado.

Se podría hacer valer, en contra de la naturaleza predicativa del concepto que, sin embargo, se habla de un concepto-sujeto [*Subjectsbegriff*]. Pero aun en tales casos, como, por ejemplo, en la oración

«Todos los mamíferos tienen sangre roja»,

no podemos sino reconocer la naturaleza[11] predicativa del concepto; pues podemos decir, en lugar de lo anterior,

---

[9] Cf. mis *Grundlagen*, p. X.

[10] Llamo nombre propio a cualquier signo para un objeto.

[11] Lo que llamo aquí naturaleza predicativa del concepto, es sólo un caso especial de la necesidad de compleción o insaturación que, como indiqué en mi escrito «Funktion und Begriff» [«Función y concepto», pp. 53-79 de este volumen] (Jena, 1891), es esencial para la función. Ciertamente, allí no pudo evitarse la expresión «la función $f(x)$», aunque también allí surgía la dificultad de que la referencia de estas palabras no es ninguna función.

198 «Lo que es mamífero tiene sangre roja»

o

«Si algo es mamífero, entonces tiene sangre roja».

Cuando escribí mis *Fundamentos de la aritmética*, no había hecho todavía la distinción entre sentido y referencia[12], y por ello aún reunía bajo la expresión «contenido enjuiciable» lo que ahora designo, estableciendo una distinción, con las expresiones «pensamiento» y «valor de verdad». Por tanto, ya no apruebo enteramente, en sus términos textuales, la explicación que se da allí en la página 77, aunque en lo esencial aún soy de la misma opinión. Para resumir puede decirse, entendiendo «predicado» y «sujeto» en sentido lingüístico: un concepto es la referencia de un predicado, un objeto es lo que jamás puede ser la referencia total de un predicado, si bien puede ser la referencia de un sujeto. Ha de señalarse además que las palabras «todo», «cada uno», «ninguno», «alguno», se colocan delante de palabras de concepto. En las oraciones universales y particulares, afirmativas y negativas, expresamos relaciones entre conceptos e indicamos el género especial de esta relación por medio de aquellas palabras que, lógicamente hablando, no han de asociarse estrechamente con las palabras de concepto que las siguen, sino que han de relacionarse más bien con la oración como un todo. Esto se ve fácilmente en el caso de la negación. Si en la oración

«Todos los mamíferos son terrestres»

la combinación de palabras «todos los mamíferos» expresase el sujeto lógico del predicado *son terrestres*, entonces para negar el todo tendría que negarse el predicado: «no son terrestres». Ahora bien, lo que hay que hacer en vez de esto es colocar el «no» delante de «todos», de donde se sigue

[12] Cf. mi ensayo «Über Sinn und Bedeutung» [«Sobre sentido y referencia», pp. 84-111 de este volumen] en el *Zeitscrift für Phil. und phil. Kritik*, 100, 1982, pp. 25 ss.

que, lógicamente hablando, «todos» pertenece al predicado. Por otra parte, negamos la oración «El concepto *mamífero* está subordinado al concepto *terrestre*» al negar el predicado «no está subordinado al concepto *terrestre*».

Si tenemos presente que, en mi manera de hablar, expresiones como «el concepto *F*» no designan conceptos sino
199 objetos, la mayor parte de las objeciones de Kerry / caen por su propio peso. Cuando alude (p. 281) a que he identificado concepto y extensión de concepto, se equivoca. Sólo he expresado mi opinión de que, en la expresión «el número que corresponde al concepto *F*», es la extensión del concepto «*equivalente al concepto F*», las palabras «extensión del concepto» pueden reemplazarse por «concepto». Obsérvese aquí que, ciertamente, esta palabra está ligada al artículo determinado. Por lo demás, ésta es sólo una observación incidental en la que no he basado nada.

Mientras que, según esto, Kerry no consigue llenar el abismo que existe entre concepto y objeto, podrían utilizarse las cosas que yo he dicho en este sentido. He dicho[13] que la asignación de un número encierra enunciar algo sobre un concepto; hablo de propiedades que pueden enunciarse de un concepto y admito que un concepto pueda caer bajo otro de orden superior[14]. He llamado a la existencia propiedad de un concepto. Un ejemplo será la mejor manera de hacer claro lo que quiero decir con esto. En la oración «Hay al menos una raíz cuadrada de 4», no se enuncia nada de un número determinado 2, ni tampoco de –2, sino de un concepto, es decir: *raíz cuadrada de 4*, y se enuncia de él que no es vacío. Pero si expreso el mismo pensamiento de esta manera: «El concepto *raíz cuadrada de 4* tiene instancias», entonces las primeras seis palabras forman el nombre propio de un objeto, y de ese objeto se enuncia algo. Obsérvese, sin embargo, que este enunciado no es el mismo que el que se hizo sobre el concepto. Esto sólo resultará sorprendente para aquel que no se dé cuenta de que un pensamiento puede descomponerse de muchas maneras, de modo que unas veces esto, otras

---

[13] *Grundlagen*, §46.
[14] *Grundlagen*, §53.

aquello, aparece como sujeto o como predicado. El pensamiento mismo no determina todavía qué ha de considerarse como sujeto. Cuando se dice «el sujeto de este juicio», sólo se designa algo determinado si, al mismo tiempo, se indica un determinado género de descomposición. En la mayoría de los casos, esto se hace en relación con una determinada forma de palabras. Pero no se debe olvidar jamás que diferentes oraciones pueden expresar el mismo pensamiento. Así pues, también podría encontrarse en el pensamiento que estamos considerando un enunciado sobre el número 4 como éste:

> «El número 4 tiene la propiedad de que hay algo de lo cual es su cuadrado».

El lenguaje tiene medios para hacer que unas veces apa-
200 rezca como sujeto una parte del / pensamiento y otras veces otra. Uno de los más conocidos es la distinción entre las formas de la activa y la pasiva. Por eso no es imposible que el mismo pensamiento aparezca, de acuerdo con *una* descomposición, como singular, de acuerdo con otra como particular, y de acuerdo con una tercera como universal. Así pues, no debe tomarnos por sorpresa el que la misma oración pueda considerarse como un enunciado sobre un concepto y también como un enunciado sobre un objeto, siempre que se tenga en cuenta que estos enunciados son distintos. En la oración «Hay al menos una raíz cuadrada de 4», es imposible reemplazar las palabras «una raíz cuadrada de 4» por «el concepto *raíz cuadrada de 4*», esto es: el enunciado que encaja con el concepto no encaja con el objeto. A pesar de que nuestra oración no presenta al concepto como sujeto, enuncia algo sobre él. Puede concebirse de modo que exprese que un concepto cae bajo otro superior[15]. Pero con esto no se borra en absoluto la distinción entre objeto y concepto. Para empezar, observemos que, en la oración «Hay al menos una raíz cuadrada de 4», el concepto no desmiente su naturaleza

---

[15] En mis *Grundlagen* he llamado a tal concepto, concepto de segundo orden y en mi escrito «Function und Begriff» concepto de segundo nivel, como voy a hacer aquí.

predicativa. Puede decirse: «Hay algo que tiene la propiedad de dar como resultado 4 cuando se multiplica por sí mismo». Por consiguiente, lo que se enuncia aquí de un concepto, no puede enunciarse jamás de un objeto, puesto que un nombre propio no puede ser nunca una expresión de predicado, aunque pueda ser parte de ella. No quiero decir que sea falso enunciar de un objeto lo que se enuncia aquí de un concepto; más bien quiero decir que es imposible, que carece de sentido. La oración «Hay Julio César» no es ni verdadera ni falsa, sino que carece de sentido, si bien la oración «Hay un hombre cuyo nombre es Julio César» tiene sentido; pero aquí tenemos de nuevo un concepto, como lo pone de manifiesto el artículo indeterminado. Tenemos lo mismo en el caso de la oración «Hay sólo una Viena». Uno no debe dejarse engañar por el hecho que el lenguaje use a menudo la misma palabra, a veces como nombre propio, a veces como palabra para concepto. El numeral indica aquí que estamos en el segundo caso. «Viena» es aquí una palabra para concepto, lo mismo que «ciudad imperial». En este sentido, podría decirse que «Trieste no es una Viena». Por otra parte, si
201 en la oración «*El concepto raíz cuadrada de / 4* tiene instancias», reemplazamos el nombre propio formado por sus seis primeras palabras por «Julio César», obtenemos una oración que tiene sentido pero que es falsa; pues el tener instancias, tal como se entiende aquí la expresión, sólo puede en verdad enunciarse de objetos de un género completamente especial, a saber: aquellos que pueden designarse mediante un nombre propio de la forma «el concepto *F*». Las palabras «el concepto *raíz cuadrada de 4*» se comporta, por lo que respecta a sus posibilidades de ser reemplazado, de una manera esencialmente distinta que las palabras «una raíz cuadrada de 4» en nuestra oración original, es decir: la referencia de estas dos combinaciones de palabras son esencialmente distintas.

Lo que se ha mostrado aquí con un ejemplo, vale de manera general: el concepto se comporta de un modo esencialmente predicativo incluso cuando se enuncia algo de él; por consiguiente, allí sólo puede reemplazarse por un concepto, nunca por un objeto. Así pues, el enunciado que se hace sobre un concepto, no le conviene en absoluto a un objeto. Los

conceptos de segundo nivel, bajo los que caen conceptos, son esencialmente distintos de los conceptos de primer nivel, bajo los que caen objetos. La relación de un objeto con un concepto de primer nivel bajo el que cae, es distinta de la de un concepto de primer nivel con un concepto de segundo nivel. Se podría quizás decir, para hacer justicia al mismo tiempo a la diferencia y a la similitud, que un objeto *cae* bajo un concepto de primer nivel, y que un concepto cae *en* un concepto de segundo nivel. Por tanto, la diferencia entre concepto y objeto se mantiene en toda su crudeza.

Con esto se relaciona lo que he dicho en mis *Grundlagen*, §53, sobre mi modo de usar las palabras «propiedad» y «característica». Las argumentaciones de Kerry me dan la oportunidad de volver una vez más sobre el asunto. Estas palabras sirven para designar relaciones en oraciones como «Φ es una propiedad de Γ» y «Φ es una característica de Ω». De acuerdo con mi manera de hablar, algo puede ser a la vez una propiedad y una característica, pero no de lo mismo. Llamo a los conceptos, bajo los que cae un objeto, sus propiedades, de modo que

«Ser Φ es una propiedad de Γ»

es sólo un giro para decir:

«Γ cae bajo el concepto de Φ».

Si el objeto Γ tiene las propiedades Φ, X, y Ψ, puedo juntarlas en Ω, de modo que es lo mismo que diga Γ tiene la propiedad
202 Ω, que diga que Γ/ tiene las propiedades Φ, X, y Ψ. A Φ, X, y Ψ las llamo entonces características del concepto Ω y, al mismo tiempo, propiedades de Γ. Está claro que la relación de Φ con Γ es completamente distinta de la que mantiene con Ω y por ello se presenta una denominación distinta. Γ cae bajo el concepto Φ; pero Ω, que es ella misma un concepto, no puede caer bajo el concepto de primer nivel Φ, sino que sólo podría estar en una relación similar con un concepto de segundo nivel. Por otra parte, Ω está subordinada a Φ.

Consideremos un ejemplo a este respecto. En vez de decir

«2 es un número positivo»

y

«2 es un número entero»

y

«2 es menor que 10»,

podríamos decir también

«2 es un número entero positivo menor que 10».

Aquí aparecen

ser un número positivo,
ser un número entero,
ser menor que diez

como propiedades del objeto 2, pero al mismo tiempo como característica del concepto

número entero positivo menor que diez.

Éste no es ni positivo, ni un número entero, ni menor que diez. De hecho, está subordinado al concepto *número entero*, pero no cae bajo él.

Comparemos ahora lo que dice Kerry en su segundo artículo, página 224: «Por número 4 se entiende el resultado de combinar en una suma 3 y 1. El concepto-objeto del concepto dado en esta combinación es el individuo numérico 4, un número completamente determinado de la serie de los números naturales. Obviamente, ese objeto lleva consigo exactamente las características nombradas en su concepto y —en el caso en que renunciemos, como ciertamente debemos hacer, a considerar como *propia* las infinitamente muchas relaciones en las que está con todos los demás individuos numéricos— ninguna otra: "el" 4 es igualmente el resultado de la combinación en una suma de 3 y 1.»

Enseguida nos damos cuenta de que aquí se ha borrado completamente la distinción que he hecho entre propiedad y característica. Kerry distingue aquí entre el número 4 y «el» número 4. Tengo que confesar que, para mí, esta distinción es incomprensible. El número 4 ha de ser un concepto; «el» número 4 ha de ser un concepto-objeto y no otra cosa que el individuo numérico 4. No es necesario argumentar que no se
203 está tratando aquí de mi distinción entre concepto / y objeto. Parece como si Kerry tuviese presente aquí —aunque de manera muy obscura— la distinción que hice entre el sentido y la referencia de las palabras «el número 4»[16]. Pero sólo de la referencia puede decirse que sea el resultado de la combinación en una suma de 3 y 1.

¿Cómo debe entenderse el «es» en las oraciones «El número 4 es el resultado de la combinación en una suma de 3 y 1» y «"el" número 4 es el resultado de la combinación en una suma de 3 y 1»? ¿Se trata de la mera cópula, o ayuda a expresar una ecuación lógica? En el primer caso «el» no debería aparecer delante de «resultado» y las oraciones rezarían más o menos así:

> «El número 4 es resultado de la combinación en una suma de 3 y 1»

y

> «"El" número 4 es resultado de la combinación en una suma de 3 y 1».

Tendríamos entonces un caso en el que los objetos designados por Kerry mediante

> «el número 4» y «"el" número 4»

caerían bajo el concepto

> *resultado de la combinación en una suma de 3 y 1.*

[16] Cf. mi ensayo, citado más arriba, «Über Sinn und Bedeutung».

Las únicas cuestiones que quedarían entonces tendrían que ver con cómo se diferencian estos objetos. Uso aquí las palabras «objeto» y «concepto» de la manera en que acostumbro a hacerlo. Yo expresaría así lo que Kerry parece querer decir

> «El número 4 tiene como propiedad aquello que, y sólo aquello que, el concepto *resultado de la combinación en una suma de 3 y 1* tiene como característica».

Si esto es así, yo expresaría el sentido de la primera de nuestras dos oraciones del modo siguiente:

> «Ser un número 4 es lo mismo que ser resultado de la combinación en una suma de 3 y 1»;

y, entonces, lo que he conjeturado que era la opinión de Kerry, podría también presentarse así:

> «El número 4 tiene como propiedad aquello que, y sólo aquello que, lo que el concepto *número 4* tiene como característica».

Si esto es verdad o no es algo que aquí puede quedar sin de-
204 cidir. En las / palabras «"el" número 4» podríamos entonces
liberar de las comillas al artículo determinado.

Pero en estos intentos de interpretación hemos dado por supuesto que, al menos en una de las oraciones, el artículo determinado que va delante de «resultado» y de «número 4» se había introducido sólo por un descuido. Ahora bien, si tomamos las palabras tal como están, su sentido sólo podemos considerarlo como una ecuación lógica, como

> «El número 4 no es otra cosa que el resultado de la combinación en una suma de 3 y 1».

El artículo determinado que va delante de «resultado» está aquí lógicamente justificado sólo si se admite: 1) que hay tal resultado, 2) que no hay más que uno. En este caso, esta combinación de palabras designa un objeto y ha de conside-

rarse como nombre propio. Si hubiera que entender nuestras dos oraciones como ecuaciones lógicas, se seguiría de ellas, puesto que el lado derecho de ambas coincide, que el número 4 es «el» número 4 o, si se prefiere, que el número 4 no es otra cosa que «el» número 4, con lo que se probaría que la distinción hecha por Kerry carece de validez. Sin embargo, no es mi tarea aquí poner de manifiesto contradicciones en su exposición. Lo que entiende por las palabras «objeto» y «concepto», en realidad no me interesa; aquí sólo quiero exponer más claramente mi propia manera de usar esas palabras y mostrar con ello que, en todo caso, se aparta de la suya, ya sea ésta consistente o no.

En absoluto le niego a Kerry el derecho a usar las palabras «objeto» y «concepto» a su manera, pero debería defender para mí igual derecho y admitir que con mi designación he captado una distinción de la máxima importancia. Se interpone ciertamente un obstáculo peculiar en el camino del entendimiento con el lector, a saber: por una cierta necesidad lingüística mi expresión, tomada de modo totalmente literal, traiciona algunas veces el pensamiento, pues se nombra un objeto cuando se quiere aludir a un concepto. Soy completamente consciente de que, en tales casos, no puedo prescindir de la complicidad benevolente del lector que no escatima un pellizco de sal.

Puede pensarse que quizás esta dificultad se ha creado artificialmente, que no se necesita tomar en consideración algo tan poco manejable como lo que he llamado concepto y que se podría, siguiendo a Kerry, considerar el que un objeto caiga bajo un concepto como una relación en la que lo que *una vez* podría aparecer como objeto, puede otra vez hacer
205 el papel de concepto. / Las palabras «objeto» y «concepto» sólo servirían entonces para indicar las diferentes posiciones en la relación. Esto puede hacerse; pero el que crea que con esto se evita la dificultad, se equivoca completamente. Lo único que se consigue es aplazarla; pues no todas las partes de un pensamiento tienen que ser completas, sino que al menos una tiene que ser de algún modo insaturada o predicativa, pues de lo contrario no podrían encajar entre sí. Así, por ejemplo, el sentido de la combinación de palabras «el número 2» no encaja con el de la expresión «el concepto *nú-*

mero primo» si no media algún vínculo. Aplicamos el vínculo en la oración «El número 2 cae bajo el concepto *número primo*». Tal vínculo está contenido en las palabras «cae bajo», que necesitan ser completadas de una doble manera: por un sujeto y por un complemento directo; y es sólo la insaturación de su sentido lo que las hace capaces de servir como vínculo. Tan sólo tenemos un sentido completo, un pensamiento, cuando tales palabras han sido completadas en este doble aspecto. Digo ahora de tales palabras o combinaciones de palabras que tienen como referencia una relación. Ahora bien, tenemos respecto de la relación la misma dificultad que queríamos evitar respecto de los conceptos; pues con las palabras «la relación caer un objeto bajo un concepto» no designamos ninguna relación, sino un objeto, y los tres nombres propios «el número 2», «el concepto *número primo*», «la relación caer un objeto bajo un concepto» tienen entre sí un comportamiento tan esquivo como los dos primeros solos; combinémoslos como los combinemos, no obtenemos ninguna oración. Así pues, nos damos cuenta fácilmente de que la dificultad que reside en la insaturación de una parte del pensamiento puede ciertamente aplazarse, pero no evitarse. «Completo» e «insaturado» son sólo, ciertamente, expresiones figuradas, pero todo lo que quiero y puedo hacer aquí es dar indicaciones indirectas.

La comprensión puede facilitarse si el lector acude a mi escrito «Función y concepto». Ante la pregunta: ¿qué es lo que se llama función en el análisis?, se tropezaba con la misma dificultad; y una consideración más a fondo del tema nos permitiría encontrar que la dificultad tiene sus raíces en el propio asunto y en la naturaleza de nuestro lenguaje, que no se puede evitar una cierta inadecuación de la expresión lingüística y que no queda otra cosa que hacer, excepto ser conscientes de ello y tenerlo siempre en cuenta.

RECENSIÓN DE E. G. HUSSERL, *PHILOSOPHIE DER ARITHMETIK* I*

313 El autor decide en la Introducción considerar, de momento, los Números[a] (*cardinalia*) y se embarca entonces en una discusión sobre multiplicidad, pluralidad, totalidad, agregado, colección, conjunto. Utiliza estas palabras como si fueran esencialmente sinónimas; el concepto de Número es diferente de esto. No obstante, la relación lógica entre multiplicidad y Número (p. 9) no queda clara en absoluto. De acuerdo con las palabras: «El concepto de Número incluye, si bien sólo por vía de las extensiones de los conceptos de su especie, los números dos, tres, cuatro, ..., los mismos fenómenos concretos que el concepto de multiplicidad», podría deducirse que tienen la misma extensión. Por otra parte, la multiplicidad ha de ser más indeterminada y más general que el Número. El asunto estaría probablemente más claro si se hubiera distinguido mejor entre el caer bajo un concepto y la subordinación. Ahora bien, lo que se pretende es, ante todo, analizar el concepto de multiplicidad. Los números determinados y el concepto genérico de

---

* La recensión de la *Filosofía de la Aritmética* de Husserl se publicó originalmente en el *Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik*, Vol. 103, 1984, pp. 313-332. En la obra recensionada, Husserl había criticado algunas de las tesis que Frege defendió en sus *Fundamentos*. En este texto encontramos la respuesta, a veces un poco brusca, de Frege y sus críticas a la concepción de los conceptos por parte de Husserl, a sus tesis de que 0 y 1 no son números, o a su apelación a la abstracción a la hora de dar cuenta de ellos. Es muy probable que la «conversión» de Husserl al antipsicologismo —después de profesar el psicologismo en su *Filosofía de la Aritmética*— se deba al contenido de esta recensión.

[a] He seguido la convención introducida por J. L. Austin en su traducción de los *Grundlagen* (*The Foundations of Arithmetic*, Blackwell, Oxford, 1950), consistente en traducir *Anzhal*, esto es: número cardinal, por «Número», y el término más usual y general *Zahl* por «número».

Número que los presupone han de surgir entonces de él por medio de determinaciones. De este modo, se nos lleva primero de lo general a lo particular y, a continuación, se nos hace recorrer el camino inverso.

Las totalidades son todos cuyas partes están colectivamente unidas. Tenemos que ser conscientes de estas partes tal como se manifiestan por sí mismas. La unión colectiva
314 no consiste ni en que / los contenidos estén simultáneamente en la conciencia, ni en que se presenten en la conciencia uno tras otro. Tampoco el espacio es, como forma que lo incluye todo, la base de la unificación. La unión consiste (p. 43) en el acto unificador mismo. «Pero no existe además del acto un contenido relacional que sea distinto de aquél en tanto que resultado creativo suyo.» La unión colectiva es una relación de un género peculiar. Aquí se explica, haciendo referencia a J. St. Mill, qué ha de entenderse por «relación», es decir: el estado de conciencia o el fenómeno (estas expresiones ha de entenderse que coinciden en la extensión de su referencia), en el que se contienen los contenidos relacionados, los fundamentos de la relación (p. 70). Se distingue a continuación entre relaciones primarias y psíquicas. Sólo estas últimas nos interesan. «Si un acto psíquico unitario se dirige hacia varios contenidos, entonces los contenidos están, respecto de él, unidos o relacionados entre sí. Si realizamos tal acto, entonces, naturalmente, buscaríamos inútilmente una relación o una unión en el contenido representacional que encierra (a no ser que, *además de esto*, hubiese allí también una relación primaria). Los contenidos están unificados aquí sólo mediante el acto y, por consiguiente, sólo se puede reparar en esa unificación mediante una reflexión especial sobre él» (p. 73). La relación de diferencia, en la cual dos contenidos se ponen en relación mediante un juicio negativo evidente, pertenece también a este género (p. 74). Por el contrario (p. 77), la igualdad es una relación primaria. (De acuerdo con esto, la coincidencia completa sería también una relación primaria, mientras que su negación, la diferencia pura y simple, lo sería psíquica. Echo de menos aquí una indicación de la diferencia entre la relación de diferencia y la unión colectiva, la cual, de acuerdo con la opinión del autor, es también una relación psíquica, puesto que

no es intuitivamente perceptible en el contenido representacional unificación alguna.) Cuando se habla de contenidos «carentes de relación», los contenidos se piensan meramente «juntos», es decir: se piensan como totalidad. «Pero en absoluto están realmente desunidos, carentes de relación. Al contrario, están unidos por medio del acto psíquico de man-
315 tenerlos juntos. Sólo en el contenido de éste falta toda / unificación perceptible» (p. 78). La conjunción «y» fija de un modo completamente apropiado la circunstancia de que contenidos dados están unidos de un modo colectivo (p. 81). «Una representación [...] cae bajo el concepto de multiplicidad en la medida en que une de un modo colectivo algún contenido percibido por sí mismo» (p. 82). (Aquí parece que por «representación» ha de entenderse un acto.) «La multiplicidad no es, en general, [...] más que algo y algo y algo, etc.; o una cosa y una cosa y una cosa, etc.; o, para abreviar, uno y uno y uno, etc.» (p. 85). Cuando eliminamos la indeterminación que reside en el «etc.», llegamos a los números uno y uno; uno, uno y uno; uno, uno, uno y uno; y así sucesivamente. Podemos también llegar directamente a esos conceptos, partiendo de la multiplicidad concreta que queramos; pues cada una de ellas cae bajo uno de esos conceptos y, ciertamente, bajo uno determinado (p. 87). Con este fin, abstraemos la condición particular de los contenidos individuales reunidos en la multiplicidad, quedándonos sólo con aquellos que son un algo o un uno, de modo que obtenemos, con respecto a la unión colectiva de éste, la forma general de la multiplicidad que pertenece a la multiplicidad que tenemos presente, es decir: el número que le pertenece (p. 88). Con esta abstracción numérica va aparejado un completo levantamiento de las restricciones sobre el contenido (p. 100). No podemos explicar el concepto general de Número de otra manera que señalando la similitud que tienen entre sí todos los conceptos de número (p. 88).

Después de que he presentado brevemente los pensamientos fundamentales de la primera parte, quiero ahora caracterizar de modo general este modo de consideración. Tenemos aquí un intento de justificar al modo científico una concepción ingenua de número. Llamo ingenuo a todo punto de vista de acuerdo con el cual una oración declarativa

numérica no es un enunciado sobre un concepto o la extensión de un concepto, pues una somera reflexión sobre el número llevará con cierta necesidad a tal concepción. Ahora bien, un punto de vista sólo es ingenuo, de manera propiamente dicha, en la medida en que las dificultades a las que ha de hacer frente son desconocidas, lo cual no se aplica completamente al autor. El punto de vista más ingenuo es
316 aquel de acuerdo con el cual el número / es algo así como un montón, un enjambre en el que las cosas están contenidas con pelos y señales. Sigue luego la concepción del número como una propiedad de un montón, agregado, o como, por lo demás, se le quiera llamar. Con esto se siente la necesidad de limpiar a los objetos de sus particularidades. Ahora bien, el intento presente pertenece a aquellos que proceden a practicar esta limpieza en el barreño de lavar psicológico. Éste ofrece la ventaja de que las cosas adoptan en él una muy peculiar flexibilidad, dejan de chocar fuertemente entre sí en el espacio y abandonan muchas peculiaridades y diferencias incómodas. La mezcla, ahora tan en boga, de psicología y lógica proporciona una excelente lejía para este fin. En primer lugar todo va a ser representación. Las referencias de las palabras son representaciones. Lo que importa en el caso de, por ejemplo, la palabra «Número» es mostrar la representación que le corresponde y describir su origen y composición. Los objetos son representaciones. De este modo, J. St. Mill permite, con la anuencia del autor, que los objetos (ya sean físicos o mentales) entren en un estado de conciencia, formen parte de este estado de conciencia (p. 70). Pero ¿no sería la Luna, por ejemplo, un estado de conciencia algo pesado para nuestros estómagos? Puesto que ahora todo es representación, podemos cambiar fácilmente los objetos fijando y desviando nuestra atención de ellos. Lo último es especialmente efectivo. Prestamos menos atención a una propiedad y ésta desaparece. Al dejar desaparecer una característica tras otra, obtenemos conceptos cada vez más abstractos. Por consiguiente, los conceptos son también representaciones, sólo que menos completas que los objetos; tienen todavía propiedades de éstos de las que no se ha hecho abstracción. La inatención es un poder lógico altamente efectivo; de ahí lo distraídos que son los sabios. Supongа-

mos, por ejemplo, que, ante nosotros, están sentados, uno junto al otro, un gato negro y uno blanco. No prestamos atención a sus colores: se convierten en incoloros, pero aún están sentados uno junto al otro. No prestamos atención a su postura: ya no están sentados sin que, con todo, hayan adoptado otra postura; sin embargo, cada uno sigue todavía en su
317 sitio. Dejamos de prestar atención / al lugar que ocupan; ya no ocupan ningún lugar, pero siguen estando completamente separados. De este modo hemos obtenido quizás de cada caso un concepto general de gato. Todo objeto se convierte, por aplicación progresiva de este procedimiento en un espectro cada vez más exangüe. Al final, obtenemos de cada objeto un algo que carece completamente de restricciones por lo que respecta a su contenido; pero el algo que se ha obtenido de un objeto se diferencia, con todo, de lo que se ha obtenido de otro objeto, aunque no es fácil decir cómo. Pero ¡un momento! Este último paso al algo parece ser más difícil aún; al menos el autor (p. 86) habla de reflexión sobre el acto psíquico del representar. Pero, como quiera que sea, el resultado es, en cualquier caso, el que se ha indicado. Mientras que, de acuerdo con mi opinión, el colocar un objeto bajo un concepto es sólo el reconocimiento de una relación que ya existía de antemano, aquí los objetos resultan alterados con ello de forma esencial, de modo que los objetos colocados bajo un mismo concepto se convierten en similares entre sí. Quizás el asunto ha de entenderse de manera que para cada objeto surja una nueva representación de la que están ausentes todas las determinaciones que no están presentes en el concepto. Con esto desaparece la diferencia entre representación y concepto, entre representar y pensar. Todo deriva hacia lo subjetivo. Pero justamente porque se borra la frontera entre los subjetivo y lo objetivo, lo subjetivo adquiere, a su vez, la apariencia de lo objetivo. Se habla, por ejemplo, de esta o de aquella representación, como si ésta, desprendida del que se la representa, se dejase ver en público. Pero nadie tiene la representación de los demás, sino sólo la suya propia, y nadie sabe incluso hasta qué punto su representación —por ejemplo, de rojo— coincide con la de los demás; pues la peculiaridad de la representación que asocio con la palabra «rojo» no puedo expresarla. Para

poder compararlas, se tendrían que tener reunidas en la misma conciencia las representaciones de uno y otro, y se tendría que estar seguro que éstas no se habían alterado durante el traslado. Con los pensamientos es completamente distin-
318 to: uno y el mismo pensamiento / puede ser captado por muchos hombres. Las partes del pensamiento y, más aún, las cosas mismas, han de distinguirse de las representaciones que acompañan en un alma a la captación del pensamiento y que alguien tiene de las cosas. Ahora bien, al reunir bajo la palabra «representación» lo objetivo y lo subjetivo se borra la frontera entre ambos de tal manera que ora una representación se trata como algo objetivo en el propio sentido de la palabra, ora algo objetivo como una representación. Así, en el caso del autor, la totalidad (el conjunto, multiplicidad) aparece ora como representación (pp. 15, 17, 24, 82), ora como algo objetivo (pp. 10 y 11, 235). Pero ¿no es en el fondo un divertimento inocuo llamar, por ejemplo, a la Luna una representación? ¡Ciertamente!; pero sólo en la medida en que uno no se imagine que puede cambiarla a voluntad o crearla por medios psicológicos. Lo único que sucede es que obtener esto como consecuencia es demasiado fácil.

A partir del modo de pensar lógico-psicológico que se acaba de caracterizar, es fácil comprender cuál es el juicio del autor sobre las definiciones. Un ejemplo de la geometría elemental puede explicar esto. Una definición usual allí es: «Un ángulo recto es un ángulo que es igual a su ángulo adyacente.» A esto, el autor diría probablemente: «La representación de angulosidad recta es simple; es, por consiguiente, una empresa equivocada, querer dar una definición de ella. En nuestra representación de la angulosidad recta no hay nada que sea la relación con alguna otra cosa, el ángulo adyacente. Es ciertamente correcto que los conceptos "ángulo recto" y "ángulo que es igual a su ángulo adyacente", tienen la misma extensión, pero no es correcto que tengan el mismo contenido. En lugar del contenido lo que se define es la extensión del concepto. Si la definición fuera correcta, entonces toda aserción de angulosidad recta, en lugar de ser como tal sobre el par concreto de líneas que tenemos delante, sería siempre sobre su relación con otro par. Todo lo que puedo admitir (p. 114) es que, en la igualdad con el ángulo

adyacente tenemos un criterio necesario y suficiente de angulosidad recta.» El autor juzga de manera similar la defini-
319 ción de igualdad numérica mediante el concepto de / de correlación unívoca. «El criterio más simple de igualdad del número es precisamente que se obtenga como resultado *el mismo* número al contar los conjuntos a comparar» (p. 115). ¡Naturalmente!; la manera más fácil de comprobar la angulosidad recta es aplicar un transportador. El autor olvida que el propio contar se basa en una correlación unívoca, es decir: de los numerales 1 a *n* y los objetos del conjunto. Cada uno de los dos conjuntos ha de contarse. De este modo, el asunto será menos sencillo que si consideramos una relación que correlaciona los objetos de ambos conjuntos sin la mediación de los numerales.

Si las palabras y las combinaciones de palabras se refieren a representaciones, entonces para cualesquiera dos de ellas sólo es posible esto: o bien designan la misma representación, o representaciones diferentes. En el primer caso carece de objeto establecer que son iguales mediante una definición, «un círculo obvio»; en el otro es falso. Hay también objeciones, una de las cuales es planteada por el autor regularmente. Una definición no puede descomponer el sentido pues, pura y simplemente, el sentido descompuesto ya no es el original. En el caso de la palabra a explicar, o bien pienso ya claramente todo lo que pienso en el caso de la expresión a definir —y entonces tenemos el «círculo obvio»—, o bien la expresión a definir tiene un sentido más ricamente articulado —en cuyo caso no pienso lo mismo en este caso que en el de la palabra a explicar—: la definición es falsa. Podría pensarse que la definición sería inobjetable, al menos en el caso en que la palabra a explicar no tiene aún un sentido, o cuando se pide expresamente que se considere el sentido como no existente, de modo que la palabra sólo recibe un sentido por definición. Pero incluso en el último caso (p. 107) el autor refuta la definición al recordar la diferenciación de las ideas. Por ello, para hacer frente a todos los reproches, se tendría que crear una nueva raíz verbal y, a partir de ella, formar una palabra. Se revela aquí una discrepancia entre los lógicos psicológicos y los matemáticos. Lo que importa a aquéllos es el sentido de las palabras y las representaciones,

que no distinguen del sentido; a éstos, al contrario, lo que les
320 importa es la cosa misma, la / referencia de las palabras[1]. El reproche de que lo que se define no es el concepto, sino su extensión, alcanza de lleno a todas las definiciones de la matemática. Para el matemático, la definición de la sección cónica como la línea de intersección de un plano con un cono no es ni más correcta ni más falsa que la que la define como un plano curvo cuya ecuación viene dada en coordenadas paralelas de segundo grado. Cuál de estas dos definiciones —o incluso otras— se elija, tiene que ver sólo con razones de conveniencia, aunque estas expresiones ni tienen el mismo sentido ni despiertan las mismas representaciones. Con esto no quiero decir que concepto y extensión del concepto son lo mismo; pero la coincidencia en extensión es una marca distintiva suficiente y necesaria para que se dé entre conceptos la relación que corresponde a la igualdad entre objetos[2]. Hago notar a este respecto que uso la palabra «igual» sin más añadido en el sentido de «no diferente», «coincidente», «idéntico». Como sucede con las definiciones, a los lógicos psicológicos les falta toda comprensión de la igualdad. Esta relación sólo les puede resultar enigmática, pues si las palabras designaron sin excepción representaciones jamás se ha podido decir «*A* es lo mismo que *B*»; pues para poder decir esto se tenía que haber distinguido antes entre *A* y *B*, y entonces serían representaciones distintas. No obstante, estoy de acuerdo con el autor en que la explicación de Leibniz «*Eadem sunt quorum unum potest subtitui alteri salva veritate*», no merece el nombre de definición, aunque por otras razones. Puesto que toda definición es una ecuación, no se puede definir la igualdad misma. Se puede llamar a la explicación de Leibniz un principio que expresa la esencia de la relación de igualdad y, como tal, es de importancia fundamental. La explicación del autor (p. 108) «Decimos sencillamente de cualesquiera contenidos que son /

[1] Ruego que, en este punto, se consulte mi ensayo «Über Sinn und Bedeutung», aparecido en esta revista [pp. 84-111 de este volumen].
[2] En sentido propiamente dicho, esta relación no se da entre conceptos. Consúltese mi ensayo «Über Sinn und Bedeutung», en *Zeitschrift für wiss. Philisophie* [pp. 84-111 de este volumen].

321 iguales entre sí, si se da igualdad en [...] las características que son precisamente el centro de interés», me resulta sencillamente impalatable.

¡Vayamos ahora a los detalles! De acuerdo con el autor, un enunciado numérico se refiere a la totalidad (el conjunto, multiplicidad) de los objetos contados (p. 185). Tal totalidad encuentra su expresión perfectamente adecuada en la conjunción «y». De acuerdo con esto, se esperaría que todos los enunciados numéricos tuviesen la forma «*A* y *B* y *C* y ... *Q* es *n*» o, al menos, que pudiesen ponerse en esta forma. Pero ¿qué es lo que en el fondo sabemos mediante la proposición «Berlín y Dresde y Múnich son tres» o, lo que sería lo mismo, «Berlín y Dresde y Múnich son algo y algo y algo»? ¿Quién querría tomarse la molestia de preguntar para obtener tal respuesta? Ni siquiera se supone que con esto se ha dicho que Berlín es diferente de Dresde, Dresde de Múnich y Múnich de Berlín, y de hecho, al menos en la última forma, no se encuentra ni la diferencia entre Berlín y Dresde ni tampoco su igualdad. Es, sin embargo, notable que esta forma de enunciado numérico casi no se de en la vida ordinaria y, cuando se da, no se emite con la intención de que sea un enunciado numérico. Encuentro que se usa sólo de forma genuina en dos casos: en el primer caso con el numeral «dos» para expresar diferenciación —«Mieres y Meres son dos [poblaciones distintas]»—, en el otro con el numeral «uno» para expresar igualdad —«Yo y el Padre somos uno»—. Este ejemplo es particularmente funesto; pues, de acuerdo con el autor, debería querer decir «somos algo y algo» o «somos dos». En realidad no preguntamos «¿Cuántos son César y Pompeyo y Londres y Edimburgo?» o «¿Cuánto es Gran Bretaña e Irlanda?», y tengo curiosidad por saber qué respondería a esto el autor. Al contrario, se pregunta, por ejemplo, «¿Cuántas lunas tiene Marte?» o «¿Cuál es el Número de lunas de Marte?», y por medio de la respuesta «El Número de lunas de Marte es dos» se llega a saber algo que es merecedor de la pregunta. Vemos por consiguiente, que tanto en la pregunta como en la respuesta aparece una palabra para concepto o una designación compues-
322 ta de un concepto / en lugar del «y» exigido por el autor. ¿Cómo sale de la dificultad? Dice que el número correspon-

de a la extensión del concepto, esto es: a la totalidad. «Sólo indirectamente puede acaso decirse que el concepto tiene la propiedad de que el número [...] corresponde a su extensión» (p. 189). Con esto se ha respondido en el fondo a lo que yo he aseverado: en un enunciado numérico se afirma algo de un concepto. No voy a discutir si la aserción afecta directamente al concepto e indirectamente a su extensión, o indirectamente al concepto y directamente a la extensión, pues con lo uno se da también lo otro. Pero esto es cierto: que ni la extensión de un concepto ni una totalidad se designan directamente, sino sólo un concepto. Ahora bien, si el autor usó la expresión «extensión de un concepto» en el mismo sentido que yo, difícilmente tendríamos una opinión distinta sobre el sentido del enunciado numérico. Esto no es obviamente el caso, pues la extensión de un concepto no es totalidad alguna en el sentido del autor. Un concepto bajo el que sólo cae un objeto tiene una extensión tan determinada como un concepto bajo el que no cae ningún objeto, o un concepto bajo el que caen infinitamente muchos objetos, en cuyos casos, de acuerdo con el Sr. Husserl, no hay en absoluto totalidad alguna. El sentido de las palabras «extensión del concepto luna de Marte» es distinto del sentido de las palabras «Deimos y Phobos», y la proposición «El Número de Deimos y Phobos es dos», si contiene de algún modo un pensamiento, contiene en cualquier caso uno distinto del de la proposición «El Número de las lunas de Marte es dos». Ahora bien, puesto que jamás se usa una proposición de esta forma para hacer un enunciado numérico, el autor ha equivocado el sentido de tal enunciado.

Consideremos más de cerca el presunto origen de una totalidad (pp. 77 ss.). Tengo que confesar que no he conseguido construir una totalidad de acuerdo con las instrucciones del autor. En el caso de uniones colectivas, los contenidos han de pensarse o representarse unidos meramente, sin que se represente ninguna relación o unión cualquiera entre ellos (p. 79). Para mí esto no es posible. No me puedo representar al mismo tiempo la rojez, la Luna y Napoleón sin represen-
323 tármelo en una unión; / por ejemplo, la rojez de un pueblo en llamas sobre la que se recorta la figura de Napoleón, iluminada por la Luna desde el lado derecho. Lo que me es simul-

táneamente presente, me lo represento como un todo; y no puedo apartar la vista de la unión sin perder el todo. Sospecho que en mi alma simplemente no hay nada de lo que el autor llama «totalidad», «conjunto», «multiplicidad»; ninguna representación de las partes cuyo acuerdo no se representa al mismo tiempo que ellas, aunque exista. Por tanto, no ha de extrañar que, más tarde, el propio Sr. Husserl (p. 242) diga de un conjunto que posee un momento figurativo que lo distingue como un todo, como una articulación. Habla (p. 235) de series, enjambres, cadenas, montones, como géneros particulares de conjuntos. Y ¿no ha de percibirse unión alguna en la representación de un enjambre? ¿O existe esta unión junto a la conexión colectiva? En este caso no afectaría a la totalidad y el «momento configurativo» no podría servir para distinguir géneros de conjuntos. ¿Cómo llega el autor a formar su opinión? Probablemente porque busca determinadas representaciones como referencias de palabras y conexiones de palabras. Por consiguiente, incluso a la conexión de palabras «rojez y la Luna y Napoleón», tendría que corresponderle un todo representacional, y puesto que el mero «y» no expresa en absoluto ninguna relación o unión representable, no habría tampoco que representar ninguna. Sucede además lo siguiente: si se representase la unión de las partes, casi todas nuestras representaciones serían totalidades, por ejemplo, la de una casa, así como también la de un enjambre o un montón; y aquí se da cuenta uno fácilmente que un número como propiedad de una casa o de la representación de una casa sería un disparate.

El propio autor encuentra una dificultad en la abstracción que proporciona el concepto general de totalidad (p. 84): «Ha de hacerse abstracción completa [...] de las particularidades de los contenidos particulares coleccionados, reteniendo al mismo tiempo su conexión. En esto parece residir una dificultad, si bien no una dificultad psicológica. Si tomamos en serio esa abstracción, entonces, naturalmente, junto con los contenidos particulares se esfuma también la conexión co-
324 lectiva, en lugar de / quedar como extracto conceptual. La solución es fácil. Abstraer de algo significa meramente: no prestarle atención particular.»

El núcleo de esta explicación reside claramente en la pa-

labra «particular». La inatención es una lejía muy fuerte que no se puede utilizar muy concentrada, de modo que no lo disuelva todo, pero tampoco muy diluida, de modo que produzca un cambio suficiente. Por consiguiente, todo depende del grado correcto de dilución, que es difícil de conseguir; al menos yo no lo he conseguido.

Puesto que, al final, el autor me da en el fondo la razón, puesto que en un enunciado numérico se contiene un enunciado sobre un concepto, no necesito examinar sus contraargumentos con más detalle. Sólo señalaré que, evidentemente, no ha captado mi distinción entre característica y propiedad. Esto no es desde luego sorprendente, dada su concepción lógico-psicológica. De este modo, llega a imputarme el punto de vista de que de lo que se trata en el caso de los enunciados numéricos es una determinación, una fijación de un concepto (p. 185). Nada más lejos de mi opinión.

Hay tres peligrosos escollos para los puntos de vista ingenuos, particularmente para los psicológicos, sobre la esencia del Número. El primero reside en la cuestión de cómo la igualdad de las unidades ha de compatibilizarse con su diferenciabilidad. El segundo consiste en los números cero y uno, el tercero en los grandes números. ¡Preguntémonos cómo busca sortear el autor estos escollos! Respecto del primero aduce (p. 156) mis palabras: «Si queremos hacer que el número surja poniendo juntos diferentes objetos, obtenemos entonces un montón en el que están contenidos los objetos con precisamente aquellas propiedades mediante las que se diferencian, y esto no es el número. Si, por otra parte, queremos formar el número poniendo juntas cosas iguales, entonces esto confluye siempre en uno, y no llegamos nunca a la multiplicidad.» Es claro que aquí he usado la palabra «igual» en el sentido de «no diferente». Por tanto, el reproche del autor de que confundo igualdad con identidad no me
325 afecta. El Sr. Husserl intenta con su nebulosa / igualdad neutralizar la contraposición: «En cierto aspecto se da ciertamente la igualdad, en otro la diferencia [...] Sólo si la expresión "poner juntas cosas iguales", con la que se quiere describir el origen del número, exigiese igualdad absoluta —lo que Frege falsamente supone— produciría aquí una dificultad, o mejor, una imposibilidad» (pp. 164-165). Ahora bien,

si la igualdad no es absoluta, entonces los objetos diferirán en alguna de sus propiedades con las que están asociados. Por tanto, compárese esto con los siguiente: «La igualdad de las unidades, tal como resulta de nuestra teoría psicológica, es evidentemente absoluta. Ciertamente, el mero pensamiento de una aproximación ya es absurdo. Pues se trata de la igualdad de contenidos en relación con esto: *que* son contenidos» (p. 168). El número consta, de acuerdo con el autor, de unidades (p. 149). Entiende aquí por «unidad» un «miembro de una multiplicidad concreta en tanto que se le aplica la abstracción numérica» o «un objeto contado como tal». Si consideramos todo esto juntamente, habremos de llegar a poner en claro la opinión del autor. En primer lugar, los objetos son obviamente diferentes; después, en virtud de la abstracción, se convierten en absolutamente iguales entre sí; pero esta igualdad absoluta sólo se da en la medida en que son contenidos. Debo pensar que esta igualdad estaba muy lejos de ser absoluta. Pero, sea como fuese, el número consiste en estas unidades absolutamente iguales; y aquí entra en escena esa imposibilidad que el propio autor pone de relieve. Ha de suponerse, sin embargo, que esta abstracción, este colocar bajo el concepto de algo, tiene como efecto un cambio: que los objetos pensados teniendo como mediación este concepto —precisamente las unidades absolutamente iguales— sean distintos de los objetos originales, pues de lo contrario no serían más iguales de lo que ya lo eran, y esta abstracción sería inútil. Tenemos que suponer que las unidades absolutamente iguales sólo se originan al colocarlas bajo el concepto de algo, ya aparezcan por transformación
326 de distintos objetos, o / como algo nuevo además de éstos. Por consiguiente, habría de pensarse que, además de los restantes objetos, hay también unidades, conjuntos de unidades además de los conjuntos de manzanas. Esto lo niega el autor muy vivamente (p. 139). La abstracción numérica tiene ciertamente la muy maravillosa y muy fructífera propiedad de hacer que las cosas sean absolutamente iguales entre sí, sin cambiarlas. Algo semejante es sólo posible en el barreño de lavar psicológico. Si el autor ha sorteado realmente el primer escollo, ha logrado hacerlo más por el camino de la magia que por el de la ciencia.

Además, el Sr. Husserl (p. 156) aduce mis palabras: «Si designamos con 1 cada uno de los objetos que han de contarse, entonces se trata de un error, pues cosas diferentes reciben el mismo signo. Si le añadimos al 1 marcas que lo diferencien, haremos que sea inútil para la aritmética.» Ante esto observa él (p. 165): «Sin embargo, cometemos este error con cada aplicación de nombres generales. Cuando llamamos a Juan, Pedro, etc., hombre, tenemos el mismo caso de "notación errónea" que aquélla en virtud de la cual, al contar, escribimos 1 para cada objeto que ha de contarse.» Cuando designamos a Juan con «hombre» y también a Pedro cometemos de hecho el error. Afortunadamente, no hacemos esto. Cuando llamamos hombre a Juan estamos diciendo con ello que Juan cae bajo el concepto *hombre* , pero no decimos ni escribimos «hombre» en lugar de «Juan». Lo que correspondería a la proposición «Juan es un hombre» sería «Juan es un 1». Si a *A* lo llamamos *B*, en el sentido de que asignamos a «*A*» el nombre propio «*B*», entonces, naturalmente, podemos en cualquier lugar decir «*B*» en lugar de «*A*»; pero entonces no nos está permitido dar el mismo nombre «*B*» a otro objeto distinto. Esta desafortunada expresión «nombre común» es seguramente la culpable de esta confusión. Éste pretendido nombre común —mejor llamado palabra para concepto— no tiene directamente nada que ver con los objetos, sino que se refiere a un concepto, y bajo este concepto caen quizás objetos; pero también puede ser vacío sin que la palabra para concepto deje de tener referencia por
327 ello. / Ya he explicado esto suficientemente en mis *Grundlangen der Arithmetik*. Queda claro, ciertamente, que con la proposición «Todos los hombres son mortales» nadie querrá enunciar nada acerca de cierto jefe de tribu akpanya, del que quizás no ha oído hablar.

De acuerdo con el autor, 5 + 5 = 10 significa lo mismo que «un conjunto (cualquiera que sea) que cae bajo el concepto cinco y cualquier otro conjunto» —(¿por qué otro?)— «que caiga bajo el mismo concepto dieron como resultado al combinarse un conjunto que cae bajo el concepto 10» (p. 202). Para elucidar esto tómese, por ejemplo, como primer conjunto el de los dedos de la mano derecha, y como el otro una estilográfica y los dedos de la mano derecha excluyendo

el pulgar. ¿Es posible que el autor haya sido alumno del Sr. O. Biermann?[b].

Pasamos ahora al segundo escollo, que consiste en los números cero y uno. El primer modo de sortearlo se encuentra fácilmente; se dice «No son números». Ahora bien, surge entonces la pregunta: ¿qué son entonces? El autor dice: respuestas negativas a la pregunta «¿Cuántos?» (p. 144). Respuestas como «Jamás» a la pregunta «¿Cuándo?». «No muchos o "ninguna multiplicidad" no es una particularización de lo mucho.» Quizás alguien puede llegar a pensar que dos no es aún ninguna multiplicidad sino sólo doseidad (dualidad en tanto que opuesto a pluralidad); que ninguno, uno y dos son las tres respuestas negativas a la pregunta «¿Cuántos?». Como confirmación podría aducir algo así como que dos es el único número primo par. Realmente, es pedir demasiado el pretender que se considere la respuesta «uno» a la pregunta «¿Cuántas lunas tiene la Tierra?» como una respuesta negativa. En el caso del cero, el asunto tiene una apariencia más aceptable. ¿Cómo han de concebirse de manera apropiada las respuestas «Jamás», «En ninguna parte», «Nada» a las preguntas «¿Cuándo?», «¿Dónde?», «¿Qué?»? Obviamente, no como respuestas apropiadas, sino como renuncias a responder en forma de pregunta. Se dice: «no puedo darte un momento, un lugar, un objeto del género deseado, porque no hay ninguno». De acuerdo con esto, una réplica semejante a la pregunta «¿Cuántos?» sería: «No te puedo
328 mencionar tal Número / porque no lo hay». Esto es lo que replicaría, de acuerdo con mi concepción del sentido de un enunciado numérico a, por ejemplo, la pregunta «¿Cuántas son Gran Bretaña e Irlanda?». No puedo considerar la respuesta «Uno» o «Cero» a la pregunta «¿Cuántos?» como algo que significa lo mismo que «No hay tal Número». ¿Cómo es que hay aquí dos réplicas negativas? Si a la pregunta «¿Quién era el predecesor de Rómulo en el trono romano?» se replica «Nadie», uno está negando con ello que alguien haya sido el predecesor de Rómulo. La negación pertenece, por consiguiente, al predicado y es lógicamente

[b] Otto Biermann fue catedrático de Matemáticas en la Deut. Techn. Hocsch. de Brünn y discípulo de Weierstrass.

incorrecto fundirla con el sujeto gramatical, de donde surge la apariencia de que «Nadie» designa, los mismo que «Rómulo», a un hombre. Como es bien sabido, en esto reside la posibilidad de ciertas falacias. Podría pensarse que tales peligros acechaban también el caso del cero y del uno; pero éstos se usan de manera exactamente igual que todos los demás números, sin particulares medidas de precaución. ¿De dónde viene esta diferencia? A la pregunta «¿Cuál es el Número de los predecesores de Rómulo en el trono de Roma?» la respuesta «Cero» es tan poco negativa como lo sería «Dos». Mediante ella no se niega que haya tal Número, sino que se lo nombra. El autor dice: «A cada unidad le corresponde el número uno» (p. 170) (¡ciertamente como propiedad negativa!) y llama al cero y al uno conceptos (p. 145). A partir de esto uno conjetura que la unidad y el 1 son conceptos con igual extensión. ¿O no es todo uno una unidad? ¿En qué se diferencian los pensamientos de las dos proposiciones «Juan es uno» y «Juan es una unidad»? ¿A quién corresponde el número cero? Sin darnos cuenta hemos dicho, con el autor, «¡El número uno!» Quedan todavía aquí muchos enigmas no resueltos por el autor, y no puedo admitir que haya sorteado felizmente este escollo.

Llegamos al tercer escollo, los grandes números. Si los números son representaciones, entonces las restricciones de nuestra capacidad de representación tienen que acarrear también una restricción del ámbito de los números. De este modo, el autor dice: «Sólo bajo circunstancias extremada-
329 mente favorables podemos, / hablando con propiedad, representarnos multiplicidades concretas de, más o menos, una docena de elementos» (p. 214). Ahora bien, aquí introduce las representaciones impropias o simbólicas como medios de proporcionar información, y de ellas se ocupa toda la segunda parte. Sin embargo, el autor tiene que admitir: «Sencillamente, ahora, cuando estamos tratando con meros signos, tampoco estamos libres de restricciones; pero no experimentamos estas barreras [...]» (p. 274). Con esto se concede la finitud del ámbito de los números. No puede haber infinitamente muchos números, si los números son representaciones que yo, u otro hombre tiene que formarse y ningún simbolismo puede superar esta limitación nuestra. Una re-

presentación simbólica es, de acuerdo con el autor (p. 215), una representación mediante signos que caracteriza unívocamente lo que ha de representarse. «Tenemos, por ejemplo, una representación propiamente dicha de la apariencia externa de una casa, cuando la contemplamos realmente; una representación simbólica cuando alguien nos da la característica indirecta: la casa del chaflán de tal y tal lado de tales y tales calles.» Esto se refiere al caso en el que está presente algo objetivo, de lo que me he de formar una representación, y por ello esta explicación no es apropiada para nuestro caso. Debe suponerse, de acuerdo con el autor, que los número son representaciones, resultados de procesos o actividades mentales (pp. 24, 46); pero ¿dónde está lo objetivo de lo que el número es una representación? ¿Qué le corresponde aquí a la casa del ejemplo anterior? Y es precisamente este objeto lo que conecta una representación propiamente dicha y una simbólica, aquello que nos justifica para decir que la representación simbólica pertenece a la propiamente dicha, y lo que será caracterizado unívocamente cuando tenemos una representación simbólica. La mezcla de lo subjetivo con lo objetivo, la circunstancia de que jamás se distingue claramente entre expresiones como «Luna» y «representación de la Luna», difunden una niebla tan impenetrable que el intento de alcanzar claridad en este punto carece en absoluto de perspectivas. Sólo puedo decir que he obtenido la impresión siguiente de la opinión del autor: Si quiero tener
330 una representación simbólica / allí donde no tengo ninguna representación propiamente dicha, entonces *idealizo* (p. 251) mis capacidades de representación; es decir: me formo, o me represento a mí mismo, que tengo una representación que de hecho no tengo y no puedo tener; y esta ilusión sería mi representación simbólica. De este modo, me puedo formar una representación simbólica por medio del signo «15», representándome que me represento a mí mismo un conjunto que consta de los elementos de un conjunto, que corresponde al número 10, y los elementos de un conjunto que corresponde al número 5, y aplico a esto el procedimiento que, de acuerdo con el autor, da lugar al número que le pertenece. En las representaciones simbólicas entran las representaciones de los signos. «Aquí los signos sensi-

bles no son, a la manera de los símbolos lingüísticos, meros acompañantes de los conceptos. Participan en nuestras construcciones simbólicas de un modo mucho más destacado [...] tan destacado que, al final, dominan casi todo el campo» (p. 273; similarmente, p. 264). Con esto el autor se aproxima mucho a las opiniones de Helmholtz y Kronecker[c]. Sucedería que los números cambiarían, cuando los signos cambiasen. Tendríamos números completamente distintos, como los de los antiguos griegos y romanos. Pero ¿tendrían también estas representaciones simbólicas las propiedades que tienen las representaciones propiamente dichas? Creo que en tan escasa medida como mi representación de una pradera verde es verde. Ahora bien, el autor, naturalmente, observa (p. 217) que la representación propiamente dicha y la simbólica que le pertenece están en la relación de equivalencia lógica. «Dos conceptos son lógicamente equivalentes si cada objeto del uno es también un objeto del otro, y viceversa.» A partir de aquí explica que las representaciones simbólicas pueden «hacer las veces de» las correspondientes propiamente dichas. La confusión entre representación y concepto resulta perturbadora aquí para la comprensión. Si nos limitamos al ejemplo de la casa del chaflán, conjeturamos que la «equivalencia» ha de consistir aquí en que mi representación propiamente dicha y la simbólica están en relación con el mismo objeto (aquella misma casa del chaflán). Ahora bien, ¿cuándo ésta puede «hacer las veces» de aqué-
331 lla? Puede conjeturarse que cuando / hablo de la casa del chaflán misma, no de mi representación. Al leer este libro he podido apreciar correctamente cuán difícil es que el sol de la verdad penetre en la niebla que surge de la mezcla de la psicología y la lógica. Satisfactoriamente, vemos aquí un comienzo de esto. Se hace valer con aires de victoria que nuestras representaciones importan poco aquí, que más bien es la cosa misma, de la que intentamos hacer representaciones, aquello de lo que nos ocupamos, aquello de lo que nuestros

[c] Se trata de Herman Ludwig von Helmholtz (1821-1894), cuyos estudios de las percepciones del espacio y de los objetos espacialmente orientados lo llevaron al campo de la geometría no euclídea, y Leopold Kronecker (1823-1891), importante precursor del intuicionismo.

enunciados tratan. Y expresiones tales aparecen varias veces en la segunda parte, que es tanto más notable, cuanto menos concuerda con el modo de pensar global del autor. Leemos (p. 214, abajo): «Incluso si no hemos dado los conceptos *de manera propiamente dicha*, los hemos dado de una manera *simbólica.*» Aquí los conceptos aparecen como algo objetivo, y la diferencia entre conceptos propiamente dichos y simbólicos se refiere sólo a su manera de darse. Se habla de especies del concepto de Número, a los que no podemos acceder en un sentido propiamente dicho (p. 265), y de números *reales*, de números *en sí*, a los que, en general, no podemos acceder (p. 295). Leemos (p. 254) sobre formaciones de números simbólicas, que pertenecen a uno y el mismo Número *real*. Uno esperaría, dado el punto de vista del autor, «no existente» en lugar de la palabra «real»; pues si el número fuese una representación propiamente dicha, en este caso no se daría absolutamente ninguna. ¿Qué son estos números «en sí» (p. 294) estos números «reales» si no números objetivos, independientes de nuestro pensar, que existen aun cuando no podamos acceder a ellos (p. 296)? El autor dice (p. 295): «Un número cualquiera puede, mediante diversas relaciones con otros números, [...] caracterizarse de modo unívoco, y cada característica tal proporciona una nueva representación simbólica de este mismo número.» Obviamente, aquí el número objetivo «en sí» es lo que era la casa del chaflán en nuestro ejemplo. No es mi representación lo que es el número, sino que me formo una o muchas representaciones *de* uno y el mismo número o, al menos, lo intento. Es una pena que el autor no mantenga claramente
332 separadas las expresiones «*A*» y «representación de *A*». / Si mi representación del número no es el número mismo, se priva con ello de sustento al modo psicológico de consideración, en la medida en que éste pretende investigar la esencia del número. Si quiero investigar una representación, he de conservarla lo más inalterada posible, algo que, naturalmente, es difícil; por otra parte, si investigo algo objetivo, entonces mis representaciones han de ajustarse lo más posible al asunto del que traten, a los resultados de esta investigación; por tanto, tienen que, en general, cambiar. Es completamente diferente para el modo de investigación si lo que se ha de

investigar es la representación de número misma, o si es sólo la representación *del* objeto propiamente dicho. El procedimiento del autor concuerda sólo con el primer caso, mientras que los últimos párrafos citados señalan sólo al último. Si un geógrafo leyese una oceanografía en la que se explicase psicológicamente el origen del mar, obtendría sin duda la impresión de que el asunto a tratar se estaba dejando de lado de una manera extravagante. Tengo absolutamente la misma impresión sobre la presente obra. Ciertamente, el mar es algo real, y el número no lo es; pero esto no le impide ser algo objetivo; y esto es de lo que se trata.

Al leer esta obra he podido ponderar la devastación que ha ocasionado la irrupción de la psicología en la lógica, y me he puesto aquí como tarea poner a las claras este daño. Los errores que he creído que tenía que indicar son menos imputables al autor que a una ampliamente extendida enfermedad filosófica. Mi posición, radicalmente diferente, me hace difícil ser justo con sus méritos que, sospecho, están en el campo de la psicología, y me gustaría llamar la atención de los psicólogos especialmente hacia el capítulo 9, donde se discute sobre la posibilidad de concepciones momentáneas de conjuntos. Pero no me considero suficientemente versado para la tarea de dar un juicio sobre este campo.

¿QUÉ ES UNA FUNCIÓN?*

656 Aquello por lo que está la palabra «función»[1] es algo que, en el análisis, no está todavía fuera de toda duda, a pesar de que su uso ha sido continuo desde hace bastante tiempo. En las explicaciones encontramos, repetidas una y otra vez, unas veces ligadas entre sí, otras separadas, dos expresiones: la de «expresión de cálculo» y la de «variable». Observamos también un uso lingüístico fluctuante, pues unas veces se llama función a lo que determina el género de dependencia o quizás al género de dependencia mismo, y otras a la variable dependiente.

Recientemente, predomina en las definiciones la palabra «variable». Pero ella misma se encuentra también muy necesitada de explicación. Cualquier variación sucede en el tiempo. Por consiguiente, el análisis debería ocuparse de un acontecer temporal, puesto que somete a su consideración variables. Ahora bien, el análisis no tiene nada que ver con el tiempo, pues el que pueda aplicarse a procesos temporales es algo que no viene al caso. También tienen lugar en geometría aplicaciones del análisis en las que el tiempo queda completamente fuera de consideración. Ésta es una dificultad que nos encontramos una y otra vez siempre que queremos llegar al fondo del asunto de la mano de ejemplos. Pues, tan pronto como intentamos señalar una variable, iremos a parar a algo que cambia con el tiempo y que, por tanto, no pertenece al análisis puro. Sin embargo, tiene que ser posi-

* Este artículo se publicó originalmente en *Festscrhift Ludwig Boltzmann gewidmet zum sechzigsten Geburtstage 20 Februar 1904* (*Libro en homenaje a Ludwig Boltzmann con motivo de su sesenta cumpleaños 20 de febrero de 1904*), Ambrosius Barth, Leipzig, 1904, pp. 656-666. Contiene un detallado análisis de la naturaleza de la función en relación, de manera especial, con el concepto de variable.

[1] Esta exposición se limitará a las funciones de un solo argumento.

ble mostrar una variable que no conlleve nada extraño a la aritmética, si es que, en suma, las variables han de ser objetos del análisis.

657 Si en la variación hay ya una dificultad, nos encontramos una nueva cuando nos preguntamos qué es lo que varía. La respuesta que se obtiene de inmediato es: una magnitud. ¡Busquemos un ejemplo! A una barra podemos llamarla una magnitud en tanto que es larga. Toda variación de la barra con respecto a su longitud, como podría resultar de, por ejemplo, calentarla, sucede en el tiempo; así pues, ni barras ni longitudes son objetos del análisis puro. Este intento de mostrar una magnitud variable en el análisis fracasa; y del mismo modo tienen que fracasar muchos otros intentos, pues ni magnitudes de longitud, ni magnitudes de superficies, ni magnitudes de ángulos, ni magnitudes de masas, son objetos de la aritmética. De entre todas las magnitudes, sólo los números pertenecen a la aritmética. Y, precisamente porque esta ciencia deja totalmente en suspenso cuáles son las magnitudes que se miden para obtener los números en casos particulares, es capaz de las más diversas aplicaciones. Por consiguiente, preguntamos: ¿son las variables del análisis números variables? ¿Qué otra cosa habrían de ser, si han de pertenecer al análisis? ¿Por qué apenas se dice «número variable», mientras que sí es frecuente «magnitud variable»? Esta última expresión suena más aceptable que «número variable», pues con esta última se suscita la duda: ¿hay números variables? ¿No conserva cada número invariable sus propiedades? Desde luego, puede decirse perfectamente que 3 y π son números invariables, constantes; pero también los hay variables. Si digo, por ejemplo, «el número que da la longitud de esta barra en milímetros», estoy nombrando en este caso un número que es variable, puesto que la barra no conserva siempre la misma longitud; así pues, con esa expresión he designado un número variable. ¡Compárese este ejemplo con el siguiente! Si digo «el rey de este reino», designo con ello a un hombre. Hace diez años el rey de este reino era un anciano, ahora el rey de este reino es un joven. Por consiguiente, he designado con esta expresión a un hombre que era un anciano y ahora es un joven. Aquí tiene que haber un error. La expresión «el rey de este reino» no

designa en absoluto a hombre alguno si no tenemos en cuenta una indicación temporal; tan pronto como se le añade una indicación temporal, puede designar un hombre inequívoca-
658 mente; / pero entonces esta indicación temporal es una parte constituyente necesaria de la expresión, y obtenemos otra expresión distinta cuando hacemos otra indicación temporal distinta. Así pues, en nuestras dos oraciones no tenemos en absoluto el mismo sujeto del que decimos algo. Del mismo modo, la expresión «el número que da la longitud de esta barra en milímetros» no designa en absoluto ningún número, si no tenemos en cuenta una indicación temporal. Si se le añade una indicación temporal, puede entonces designar un número, por ejemplo 1.000; pero éste es invariable. Con otra indicación temporal obtenemos una expresión distinta, que puede designar ahora otro número distinto, por ejemplo, 1.001. Si decimos: «Hace media hora el número que daba la longitud de esta barra en milímetros era un cubo; ahora el número que da la longitud de esta barra en milímetros no es un cubo», no tenemos en absoluto el mismo sujeto del que decimos algo. El 1.000 no se ha inflado para convertirse, por así decirlo, en 1.001, sino que ha sido reemplazado por este último. ¿O es el número 1.000 el mismo que el 1.001, sólo que con otra expresión en el rostro? Si algo varía, tiene entonces, una tras otra, diversas propiedades, estados del mismo objeto. Si no fuera el mismo, no tendríamos ningún sujeto del que pudiéramos decir que ha variado. Una barra se dilata al calentarla. Mientras esto sucede, continúa siendo la misma barra. Si en vez de esto se la hubiera quitado del medio y hubiese sido reemplazada por otra más larga, no se podría decir que se había dilatado. Un hombre envejece; pero si, dada esa circunstancia, no pudiéramos reconocerlo como el mismo, no tendríamos nada de lo que pudiéramos decir que envejece. ¡Apliquemos esto al número! ¿Qué continúa siendo lo mismo cuando un número varía? ¡Nada! Se sigue entonces que el número no varía en absoluto; pues no tendríamos nada de lo que pudiéramos decir que ha variado. Un cubo jamás se convierte en un número primo ni un número irracional se convierte jamás en uno racional.

Así pues, no hay números variables y el hecho de que no tengamos nombres propios para números variables lo

confirma. Hemos fracasado en el intento de designar un número variable mediante la expresión «el número que da la longitud de esta barra en milímetros» Pero ¿no designa-
659 mos con «x», «y» y «z» números variables? / Ciertamente, se usa esta manera de hablar; pero estas letras no son nombres propios de números variables, como «2» y «3» son nombres propios de números constantes; pues los números 2 y 3 se distinguen de un modo especificable, pero ¿cómo se distinguen los números variables supuestamente designados por «x» e «y»? No podemos decirlo. No podemos indicar qué propiedades tiene x y qué propiedades que se diferencian de éstas tiene y. Si es que asociamos algo con estas letras, se trata de la misma nebulosa representación en ambos casos. Donde aparentemente se presentan diferencias, se trata de aplicaciones; pero de éstas no hablamos aquí. Puesto que no somos capaces de concebir cada variable en su particularidad, no podemos asignar a las variables nombres propios.

El Sr. E. Czuber ha intentado evitar alguna de las dificultades mencionadas[2]. Y, para desembarazarse del tiempo, explica la variable como un número indeterminado. Pero ¿hay números indeterminados? ¿Han de dividirse las números en determinados e indeterminados? ¿Hay hombres indeterminados? ¿No tiene que ser cada objeto determinado? Pero ¿no es el número n indeterminado? No conozco en absoluto el número n. «n» no es el nombre propio de algún número, determinado o indeterminado. Y con todo se dice algunas veces «el número n». ¿Cómo es posible esto? Tal expresión tiene que considerarse en un contexto. ¡Tomemos un ejemplo! «Si el número n es par, entonces cos $n\pi = 1$». Aquí sólo el todo tiene un sentido; ni el antecedente por sí solo, ni el consecuente por sí solo, lo tienen. La cuestión de si el número n es par no puede responderse, del mismo modo que la de si cos $n\pi = 1$. Para esto «n» tendría que ser el nombre propio de un número, que sería entonces por necesidad un número determinado. La letra «n» se escribe para conseguir generalidad. Se presupone aquí que, si se la reemplaza por el nom-

---

[2] *Vorlesungen über Diferential-und Integralrechnung* [*Lecciones sobre el cálculo diferencial e integral*], Teubner, Leipzig, 1, §2.

bre propio de un número, tanto el antecedente como el consecuente reciben un sentido.

Desde luego, puede hablarse aquí también de indetermi-
660 nación; ahora bien / «indeterminado» no es aquí ningún calificativo de número, sino un adverbio de, por ejemplo, «indicar». No se puede decir que «*n*» designa a un número indeterminado, pero sí que indica indeterminadamente números. Y esto es lo que sucede siempre que se usan letras en aritmética, con la excepción de unos pocos casos (π, e, i) que desempeñan el papel de nombres propios; pero entonces designan números determinados, invariables. No hay, por tanto, números indeterminados, y este intento del Sr. Czuber es un fracaso.

En segundo lugar, el Sr. Czuber quiere poner remedio a la dificultad consistente en que no se puede concebir una variable en tanto que distinta de las otras. Llama a la totalidad de los valores que puede tomar una variable el dominio de la variable y dice: «la variable x se considera definida si, para cada número real que la designa, puede establecerse si pertenece o no al dominio». Cuenta como definida. Pero ¿lo está? Dado que no hay números indeterminados, es imposible definir un número indeterminado cualquiera. Se establece que el dominio es la marca característica de la variable. De acuerdo con esto, si tenemos los mismos dominios tendríamos las mismas variables. Se sigue que, en la ecuación «$y = x^2$», y sería la misma variable que x si el dominio de x es el de los números positivos.

Tenemos que considerar malogrado este intento, tanto más si la expresión «una variable toma un valor» carece en absoluto de claridad. Una variable ha de ser un número indeterminado. Ahora bien, ¿cómo consigue un número indeterminado tomar un número, puesto que el valor es obviamente un número? ¿Toma también, por ejemplo, un hombre indeterminado uno determinado? En otros casos se dice, ciertamente, que un objeto toma una propiedad; aquí el número tiene que desempeñar ambos papeles; como objeto se le denomina variable o magnitud variable, como propiedad se le denomina valor. Es por ello por lo que se prefiere la palabra «magnitud» a la palabra «número», porque así uno está obligado a engañarse respecto del hecho de que la magnitud va-

riable y el valor, que supuestamente toma, son en el fondo lo mismo, de que no tenemos en absoluto un caso en que un objeto toma, una tras otra, diferentes propiedades y de que, por tanto, no puede hablarse en modo alguno de variación.

Por lo que respecta a las variables tenemos el resultado
661 / siguiente. En efecto, pueden admitirse magnitudes variables, pero no pertenecen al análisis puro. No hay números variables. La palabra «variable» no tiene por tanto, justificación alguna en el análisis puro.

Ahora bien, ¿cómo obtenemos la función a partir de las variables? En lo esencial, esto sucede siempre de la misma manera y por ello seguiremos la exposición del Sr. Czuber. Escribe él en §3:

> «Si con cada valor de la variable real x, que pertenezca a su dominio, está correlacionado un número determinado y, entonces y queda definido de modo general como variable y se le denomina *función de la variable real x*. Este estado de cosas se expresa mediante una ecuación de la forma $y = f(x)$.»

Sorprende aquí en primer lugar que a y se le llame número determinado, puesto que en cuanto que variable tendría que ser indeterminado. y no es un número ni determinado ni indeterminado; más bien y se asigna incorrectamente a una pluralidad de números, y a continuación se habla como si fuera uno sólo. Sería más sencillo y más claro representar el caso del modo siguiente. Cada número de un dominio-x se correlaciona con un número. A la totalidad de esos números la llamo el dominio-y. Desde luego, tenemos realmente un dominio-y, pero no hay un y del que pudiéramos decir que es una función de la variable real x.

Ahora bien, la delimitación del dominio parece ser irrelevante para la cuestión de qué es esencialmente la función. ¿Por qué no podemos considerar igualmente como dominio la totalidad de los números reales o la totalidad de los números complejos incluyendo los reales? El núcleo del asunto se esconde, sin embargo, en otro lugar completamente distinto, a saber: en la palabra «correlacionado». Ahora bien, ¿qué es lo que hace que me dé cuenta de que el número 5 está corre-

lacionado con el número 4? La pregunta no puede responderse si no se la completa de alguna manera. Sin embargo, de acuerdo con la explicación del Sr. Czuber, parece como si estuviera determinado para cada dos números, y sin explicación adicional alguna, si el primero está correlacionado o no con el segundo. Afortunadamente, el Sr. Czuber añade esta observación:

662 «La descripción anterior no enuncia nada sobre la *ley* de correlación, que se indica de manera más general mediante la *característica f*; tal ley puede establecerse de múltiples maneras.»

Así pues, la correlación sucede de acuerdo con una ley y son pensables diversas leyes de este tipo. Ahora bien, en ese caso la expresión «y es una función de x» no tiene ningún sentido si no se completa con la indicación de la ley de acuerdo con la que ocurre la correlación. Esto constituye un fallo de la definición. ¿Y no es precisamente la ley, que la explicación trata como no existente, el asunto más importante? Observamos que con ello la variabilidad ha desaparecido completamente de nuestra vista, mientras que la generalidad aparece en nuestro horizonte, pues hacia ella señala la palabra «ley».

Las diferencias entre las leyes de correlación están correlacionadas con las diferencias entre funciones, y ya no pueden concebirse como cuantitativas. Si pensamos sólo en las funciones algebraicas, en las funciones logarítmicas, o en las funciones elípticas, hemos de convencernos inmediatamente de que estamos tratando aquí de diferencias cualitativas, una razón más para no explicar las funciones como variables. Si fueran variables, las funciones elípticas serían también variables elípticas.

En general, expresamos tal ley de correlación mediante una ecuación, en cuyo lado izquierdo está la letra «y», mientras que en el lado derecho aparece una expresión del cálculo que se compone de signos numéricos, signos de cálculo y de la letra «x» como, por ejemplo:

$$«y = x^2 + 3x».$$

La función se ha definido ahora como tal expresión del cálculo. Recientemente, se ha considerado que este concepto es demasiado estricto. Sin embargo, este inconveniente podría muy bien evitarse mediante la introducción de nuevos signos en el lenguaje simbólico de la aritmética. Otra objeción de mayor peso es la de que la expresión de cálculo, como grupo de signos, no pertenece en modo alguno a la aritmética. Puedo considerar que la teoría formalista, que intenta hacer pasar como objetos de esta ciencia a los signos,
663 ha quedado definitivamente refutada por mi / crítica, contenida en el volumen II de *Grundgesetze der Arithmetik*[a]. No se ha distinguido siempre nítidamente entre el signo y la cosa designada, de modo que por «expresión del cálculo» (*expressio analytica*) se ha entendido también, en parte, su referencia. Ahora bien ¿qué designa «$x^2 + 3x$»? En rigor, nada en absoluto, puesto que la letra «x» sólo indica números, no los designa. Si reemplazamos «x» por un signo numérico, obtenemos entonces una expresión que designa un número, por lo tanto nada nuevo. Al igual que la propia «x», «$x^2 + 3x$» sólo indica. Esto puede suceder para indicar generalidad, como en las oraciones

$$«x^2 + 3x = x \cdot (x + 3)»,$$

$$«\text{Si } x > 0, \text{ entonces } x^2 + 3x > 0».$$

Pero ¿dónde queda ahora la función? Parece que no puede considerarse que sea la expresión de cálculo misma ni su referencia. Y, sin embargo no estamos demasiado alejados de lo correcto. Cada una de las expresiones «sen 0», «sen 1», «sen 2» se refiere a un número particular, pero tenemos una parte constituyente común «*sen*», en la que encontramos designada la esencia genuina de la función seno. Este «*sen*» corresponde ciertamente a la «*f*» de la que el Sr. Czuber dice que indica una ley y, ciertamente, el paso de «*f*» a «*sen*», como el de «*a*» a «2», es el paso de un signo que indi-

[a] *Grundgesetze der Arithmetik*, t. II, H. Pohle, Jena, 1903. Reimpreso en G. Olms, Hildesheim, 1963.

ca a uno que designa. Por ello «*sen*» se referiría a una ley. Desde luego, esto no es completamente exacto. Nos parece más bien que la ley viene expresada por la ecuación «$y = sen\ x$», de la que el signo «*sen*» sólo es una parte, si bien es la marca distintiva de la peculiaridad de la función. ¿Y no tenemos aquí lo que buscamos, la función? Así pues, estrictamente hablando, también «*f*» indicará una función. Y llegamos ahora a lo que distingue las funciones de los números. Esto es, el «*sen*» necesita ser completado por un signo numérico que no pertenece, sin embargo, a la designación de la función. Esto vale de modo general: el signo de una función es insaturado, necesita ser completado por un signo numérico, que llamamos entonces signo de argumento. Vemos esto también el signo de la raíz, en el signo del logaritmo. Los
664 signos de función / no pueden aparecer sólos, como los signos numéricos, a un lado de la ecuación, sino sólo cuando son completados por un signo que designa o indica un número. Ahora bien, ¿a qué se refiere tal conexión de un signo de función y un signo numérico como «*sen* 1», «$\sqrt{1}$», «*l* 1»? Cada vez a un número. De este modo, obtenemos signos numéricos que están compuestos de dos partes heterogéneas, de las que la insaturada se completa con la otra.

Esta necesidad de compleción puede hacerse visible mediante paréntesis vacíos, por ejemplo «sen( )» o «$(\ )^2 + 3(\ )$». A pesar de que, en rigor, esto es lo más apropiado y lo más idóneo para prevenir el error que surge cuando se considera el signo de argumento como parte del signo de función, es probable que este simbolismo no encuentre aceptación alguna[3]. También se puede usar una letra para este fin. Si elegimos «ξ», entonces «sen ξ» y «$\xi^2 + 3 \cdot \xi$» son signos de funciones. Sin embargo, se tiene que tener presente que la única tarea que «ξ» lleva a cabo aquí es la de marcar los lugares donde ha de insertarse el signo que lleva a cabo la compleción. Sería bueno que esta letra no se utilizara para ningún otro propósito que, por ejemplo, no se utilizara en lugar de «*x*», que en nuestro ejemplo sirve para expresar la generalidad.

---

[3] En cualquier caso sólo se pretende que este simbolismo valga para el caso excepcional en el que se quiere designar una función completamente aislada. En «sen 2», «sen» sólo designa ya la función.

Un defecto del simbolismo habitual para el cociente diferencial lo constituye el hecho de que la letra «x» debe marcar tanto los lugares de los argumentos como servir para expresar generalidad, como en la ecuación

$$«\frac{d\cos\frac{x}{2}}{dx} = \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}\frac{x}{2}»$$

De esto resulta una dificultad. De acuerdo con los principios generales para el uso de letras en aritmética, debe llegarse a un caso particular cuando se substituye «x» por un signo numérico. Pero entonces la expresión

$$«\frac{d\cos\frac{2}{2}}{d2}»$$

665 es incomprensible, puesto que no somos capaces de reconocer la función. No sabemos si es

$$\cos\frac{(\,)}{2} \text{ ó } \cos\frac{2}{(\,)} \text{ ó } \cos\frac{(\,)}{(\,)}$$

Por ello nos vemos en la necesidad de usar un modo de notación tan chapucero como

$$«\left(\frac{d\cos\frac{x}{2}}{dx}\right)_{x=2}»$$

Sin embargo, la mayor desventaja es que con esto se dificulta la comprensión de lo que es esencial en la función.

Naturalmente, a la peculiaridad del signo de función, que hemos llamado insaturación, le corresponde algo en las funciones mismas. También a éstas podemos llamarlas insaturadas y caracterizarlas así como algo fundamentalmente diferente de los números. Desde luego, esto no es una definición; pero tal cosa tampoco es posible aquí. Tengo que limitarme a indicar, mediante una expresión figurativa, lo que

quiero decir y no puedo prescindir aquí de la complicidad benevolente del lector.

Si se completa una función mediante un número, de manera que dé como resultado un número, llamamos a este último el valor de la función para el primer número como argumento. Se acostumbra a leer la ecuación «$y = f(x)$» como «y es una función de x». Hay aquí dos errores: en primer lugar, se traduce el signo de igualdad por la cópula; en segundo lugar, se confunde la función con su valor para un argumento. A partir de estos dos errores ha surgido la opinión de que la función es un número, aunque variable o indeterminado. Por el contrario, hemos visto que tales números no existen en absoluto y que las funciones son fundamentalmente diferentes de los números.

El ansia de brevedad ha introducido en el lenguaje matemático muchas expresiones inexactas y su repercusión ha sido obscurecer el pensamiento y facilitar la introducción de
666 definiciones defectuosas. Las matemáticas deberían ser, en rigor, un modelo de claridad lógica. En realidad, quizás no se encuentren en los escritos de ninguna ciencia expresiones más distorsionadas y, por tanto, pensamientos más distorsionados, que en los escritos matemáticos. Jamás deberíamos sacrificar la corrección lógica a la brevedad de la expresión. Es, por consiguiente, de la mayor importancia crear un lenguaje matemático que combine la exactitud más estricta con la mayor brevedad posible. Para esto, lo más apropiado sería ciertamente una conceptografía, un conjunto de reglas, de acuerdo con las cuales y mediante signos escritos o impresos, fuéramos capaces de expresar directamente pensamientos, sin que interviniese para nada la voz.

---

[4] La definición que da H. Hankel en sus *Untersuchungen über die unendlich oft oszillierenden und unsteigen Funktionen* [*Investigaciones sobre las funciones infinitamente oscilantes y discontinuas*], *Universität Programm*, Tubinga, 1870, §1, carece de utilidad dado que contiene un circulo vicioso, pues incluye la expresión «$f(x)$», que presupone, para su explicación, lo que hay que definir.

INTRODUCCIÓN A LA LÓGICA*

(AGOSTO DE 1906)

SEPARACIÓN DE FUERZA ASERTÓRICA Y PREDICADO

201 Se puede expresar un pensamiento sin aseverarlo. Pero falta en los lenguajes una palabra o signo que solamente cumpla esta última función. Así, se confunde en lógica, según parece, la predicación con el juicio. No se sabe con certeza si lo que los lógicos llaman juicio ha de considerarse como un pensamiento con o sin el juicio de que es verdadero. De acuerdo con la expresión literal, se le debería considerar como un pensamiento *con* el juicio; pero el uso del lenguaje es a menudo tan ambiguo que no se incluye el auténtico acto del juicio, el conocimiento de la verdad. *Empleo la palabra «pensamiento» aproximadamente como los lógicos emplean «juicio».* Pensar es captar pensamientos. Después de captar un pensamiento, se le puede aceptar como verdadero (*juzgar*) y expresar dicha aceptación (aseverar). Hay que distinguir también entre fuerza judicativa y negación. A todo pensamiento corresponde otro opuesto, de modo que el rechazo de uno coincide siempre con la aceptación del otro. Se puede decir que juzgar es elegir entre opuestos. El rechazo de uno y el reconocimiento del otro son *una* acción. Tampoco se necesita para el rechazo ninguna denominación, ningún signo especial. Se puede hablar de la negación antes de haber distinguido partes en el pensa-

---

* Este artículo apareció bajo el título «Einleitung in die Logik», en G. Frege (1969) *Nachgelassene Schriften*, Felix Meiner Verlag, Hamburgo. La versión castellana de este artículo es de Luis M. Poveda, revisada por L. M. Valdés. Es, probablemente, parte de un libro de texto de lógica que Frege pensaba componer.

miento. La controversia sobre si la negación pertenece al pensamiento como un todo o a la parte predicativa es tan estéril como aquella otra sobre si el abrigo viste al hombre que ya está vestido o forma un todo con las demás prendas de vestir. El abrigo, al cubrir al hombre que ya está vestido, se une por sí mismo a las demás prendas. El componente predicativo del pensamiento puede considerarse, hablando figuradamente, como envoltorio del componente que hace de sujeto. Cualesquiera otros envoltorios que se añadan se unirán por sí mismos a los ya existentes.

COMPOSICIÓN HIPOTÉTICA DE ORACIONES

Cuando se dice que en un juicio hipotético se interrelacionan dos juicios, la palabra «juicio» se utiliza de tal modo que la aceptación de la verdad no está implicada en ello. Pues si se expresa la oración compuesta total con fuerza asertórica, no se asevera la verdad del pensamiento del antecedente ni la del pensamiento del consecuente. La aceptación de la verdad se extiende más bien al pensamiento expresado en la oración compuesta tomada como un todo. Y,
202 en un / examen más preciso, se encuentra en muchos casos que el antecedente, tomado de forma aislada, no expresa un pensamiento, ni tampoco lo hace el consecuente (no son oraciones propiamente dichas). En tales casos, la mayoría de las veces se da la relación de subordinación de conceptos. Aquí se mezclan habitualmente cosas de dos tipos que yo he distinguido por vez primera: la relación que designo con la barra de condición y la generalidad. Aquélla corresponde aproximadamente a lo que los lógicos quieren decir con «relación entre juicios». El signo de relación (*la barra de condición*) une oraciones propiamente dichas entre sí, de modo que cada uno de ellas expresa un pensamiento.

Si prescindimos de los mitos y la ficción y sólo consideramos los casos en que se trata de la verdad en sentido científico, podemos decir que *todo pensamiento es verdadero o falso, tertium non datur.* No tiene sentido hablar de casos en los que un pensamiento es verdadero y de otros en los que es falso. El mismo pensamiento no puede ser unas veces verda-

dero y otras falso, sino que, en los casos en los que se tienen presentes tales consideraciones, se trata siempre de pensamientos diferentes. Y el hecho de que se crea tener un mismo pensamiento se basa en que se usan los mismos sonidos, y estos sonidos no formarán entonces una oración propiamente dicha. No se distingue siempre de forma suficiente entre el signo y lo que éste expresa.

Si tenemos dos pensamientos, sólo son posibles cuatro casos:

1. El primero es verdadero, e igualmente el segundo;
2. El primero es verdadero, el segundo falso;
3. El primero es falso, el segundo verdadero;
4. Ambos son falsos.

Si el *tercero* de estos casos *no* se da, entonces existe la relación que he designado por medio de la barra de condición. La oración que expresa el primer pensamiento es el consecuente. La oración que expresa el segundo, es el antecedente. Han pasado casi veintiocho años desde que propuse esta explicación. Entonces creía que me bastaba escribirlo, y los otros sabrían más que yo. Ahora, después de transcurrido más de un cuarto de siglo, la gran mayoría de los matemáticos no tiene idea del asunto, y lo mismo puede decirse de los lógicos. ¡Qué apatía! Cómo me recuerda este comportamiento de los estudiosos al del buey delante de una nueva puerta: mira con ojos saltones, muge, trata de avanzar de lado, pero traspasarla podría ser peligroso. Entiendo que al principio resulte extraño, pero si no fuera así se habría descubierto ya hace mucho tiempo. Pues ¿es que tenemos que guiarnos siempre por la primera impresión que nos cause un asunto? ¿Acaso no se tiene tiempo para meditarlo? No, pues ¿qué cosas sensatas podrían descubrirse al hacerlo? Probablemente se echa en falta una relación interna entre los pensamientos. No resulta clarificador el que sólo deba conside-
203 rarse del pensamiento si / es verdadero o falso, no su contenido mismo. Esto está relacionado con lo que ya he expuesto en «Sobre sentido y referencia»[a]. Ahora bien, si alguien

[a] Ver pp.84-111 de este volumen.

intentase dar una explicación en la que destaque más el contenido del pensamiento, probablemente resultaría que en el fondo es superfluo lo que se añade al pensamiento y que únicamente se enreda el asunto sin beneficio alguno, o que las oraciones (antecedente y consecuente) no son oraciones propiamente dichas, ninguna de los cuales expresa un pensamiento, de modo que en verdad no se ponen en relación pensamientos, tal como se quería, sino conceptos o relaciones. ¿Es ahora la relación que designo con la barra de condición una relación que se puede dar entre pensamientos? ¡Realmente no! Sólo puede decirse que *el signo de esa relación* (esto es: la barra de condición) *conecta oraciones*. Posteriormente se complementa la explicación, de forma que pueden conectarse también nombres de objetos por medio de la barra de condición. Y esto entra todavía menos en la cabeza. Una consideración más precisa de la generalidad lo hará aceptable.

GENERALIDAD

En primer lugar, nos vemos aquí abocados a *descomponer un pensamiento en partes*, ninguna de las cuales es un pensamiento. El caso más sencillo es la división en dos partes. Las partes son heterogéneas: una insaturada, la otra saturada (completa). Hay que considerar también los tipos de pensamientos calificados por la lógica tradicional como juicios *singulares*. En ellos se afirma algo de un objeto. La oración que expresa tal pensamiento consta de un *nombre propio* —y éste corresponde a la parte *completa* del pensamiento— y de una parte *predicativa*, que corresponde a la parte *insaturada* del pensamiento. Por lo demás, la singularidad no le corresponde propiamente al pensamiento en sí, sino que sólo le corresponde en función del modo de una posible descomposición. Es posible que el mismo pensamiento pueda aparecer como particular con respecto a otra descomposición (Cristo convirtió a algunos hombres a su doctrina). Los nombres propios designan objetos, y un pensamiento singular trata acerca de objetos. Pero no se puede decir que el objeto sea parte del pensamiento como el / nombre propio es
204

parte de la oración correspondiente. El Mont Blanc con su nieve y sus glaciares no es parte del pensamiento de que el Mont Blanc mide más de 4.000 m, sino que sólo se puede decir que al objeto, en una manera que habremos de considerar, le corresponde una parte del pensamiento (sentido y referencia). Mediante la descomposición de pensamientos singulares se obtienen componentes completos e insaturados que no pueden aparecer de forma aislada, pero cualquier componente de uno de los géneros, forma con cualesquiera del otro género un pensamiento. Si se mantiene fija la parte insaturada y se cambia la parte completa, puede esperarse que los pensamientos así formados sean en unos casos verdaderos, en otros falsos. Pero también puede suceder que sean todos verdaderos. Sea, por ejemplo, el componente insaturado lo que se expresa con las palabras «es igual a sí mismo». Esto es entonces una condición particular de la parte insaturada. Obtenemos así un nuevo pensamiento (todo es igual a sí mismo) que, en comparación con los pensamientos singulares (dos es igual a sí mismo; la luna es igual a sí misma), es general. La palabra «todo», que ocupa aquí el lugar de los nombres propios («la Luna»), no es ella misma un nombre propio, no designa un objeto, sino que sirve para conferir generalidad al contenido de la oración. A menudo se permite que el lenguaje influya demasiado en la lógica, y por ello la conceptografía es buena para deshacerse de la forma lingüística. En lugar de decir «la Luna es igual a sí misma», se puede decir también «la Luna es igual a la Luna», sin modificación del pensamiento. De aquí se deduce que no es esencial si un nombre propio aparece en uno o más lugares de la oración. Pero no es posible lingüísticamente que, en el paso a la generalidad, la palabra «todo» pueda aparecer en dos lugares. La oración «todo es igual a todo» no tendría el sentido deseado. Se puede, acercándose al uso matemático, usar una letra y decir «*a* es igual a *a*». Esta letra ocupa entonces el lugar (o lugares) de un nombre propio, pero no es un nombre propio, no tiene referencia, sino que sólo sirve para dar una generalidad al contenido de la oración. Y este uso de las letras, por ser más simple y, desde el punto de vista de la lógica, más consecuente, ha de preferirse a los medios que ofrece el lenguaje para este objetivo.

Si un todo consta de dos oraciones unidas por «y», cada una de las cuales expresa un pensamiento, se puede considerar el sentido del todo como un pensamiento, pues dicho sentido es verdadero o falso, es decir: verdadero si ambas partes componentes del pensamiento son verdaderas, falso en cualquier otro caso, o sea, si al menos una de las partes componentes de pensamiento es falsa. Si llamamos al pen-
205 samiento del todo la conjunción de los dos / pensamientos componentes, entonces la conjunción tiene también su pensamiento opuesto, como lo tiene todo pensamiento. Ahora está claro qué es el opuesto de una conjunción del opuesto de un primer pensamiento y un segundo pensamiento. Es lo que expreso con la barra de condición. La oración que expresa el primer pensamiento es el consecuente, la que expresa el segundo es el antecedente. Pero a la oración completa que expresa el opuesto de la conjunción del opuesto de un primer pensamiento y de un segundo pensamiento, podemos llamarla oración hipotética, cuyo consecuente es la oración que expresa el primer pensamiento y cuyo antecedente es la que expresa el segundo pensamiento. Llamaremos pensamiento hipotético al pensamiento de la oración hipotética cuyo consecuente expresa el primer pensamiento y cuyo antecedente expresa el segundo pensamiento. Si tanto en el antecedente como en el consecuente aparece el mismo nombre propio, podemos considerar al pensamiento hipotético como un pensamiento singular desde el punto de vista de la descomposición, en el que la parte completa corresponde al nombre propio y lo restante a la parte insaturada. Si mantenemos fija la parte insaturada y cambiamos la parte cerrada, puede suceder que obtengamos siempre un pensamiento verdadero, sea cual sea la parte cerrada que consideremos. Aquí, y a lo largo de todas estas consideraciones, se presupone que no nos movemos en el ámbito del mito y la ficción, sino en el de la verdad (en sentido científico), de modo que todo nombre propio consigue efectivamente su objetivo, es decir: designar un objeto y, por consiguiente, no es vacío. Las partes completas de los pensamientos de las que hablamos aquí no son, en verdad, los objetos designados mediante los nombres propios, pero están conectados con ellos; y, si no ha de caer todo en el ámbito de la ficción, es esencial que

haya tales objetos. De lo contrario, no podría hablarse en absoluto de la verdad del pensamiento. Supongamos que obtenemos siempre un pensamiento verdadero en un caso dado cuando, como se ha dicho más arriba, mantenemos fija la parte insaturada, en un pensamiento hipotético, que al mismo tiempo puede considerarse singular, y utilizamos cualesquiera parte completa para la saturación. Con esto llegamos al pensamiento general, y el pensamiento hipotético singular del que partimos aparece como caso particular de aquél. Por ejemplo:

Primer pensamiento: que el cuadrado de 3 es mayor que 2.
Segundo pensamiento: que 3 es mayor que 2.
Opuesto del primer pensamiento: que el cuadrado de 3 no es mayor que 2.
Conjunción del opuesto del primer pensamiento y el segundo pensamiento: que el cuadrado de 3 no es mayor que 2, y que 3 es mayor que 2.
Opuesto de la conjunción del opuesto del primer pensamiento y el segundo pensamiento: que es falso que al mismo tiempo el cuadrado de 3 no sea mayor que 2 y que 3 sea mayor que 2.

Éste es el pensamiento hipotético cuyo consecuente es el primer pensamiento y cuyo antecedente es el segundo. La
206 expresión «Si 3 / es mayor que 2, entonces el cuadrado de 3 es mayor que 2» tiene algo chocante, y más todavía la expresión que se obtiene si se pone «2» en lugar de «3»: «Si 2 es mayor que 2, entonces el cuadrado de 2 es mayor que 2». Pero que es falso que el cuadrado de 2 no sea mayor que 2 y que, al mismo tiempo, 2 sea mayor que 2, eso es un pensamiento verdadero. Así, se puede tomar en lugar de 3 un número cualquiera, obteniéndose siempre un pensamiento verdadero. Pero ¿qué sucede si se toma un objeto que no sea un número? Toda oración que se obtenga de «*a* es mayor que 2», colocando en lugar de «*a*» el nombre propio de un objeto, expresa un pensamiento y ese pensamiento es siempre falso si el objeto no es un número. Otra cosa sucede en la primera oración, porque la expresión que resulta de «el cuadrado de *a*» al colocar en lugar de «*a*» el nombre propio de

un objeto, sólo designa un objeto según el uso habitual si el objeto es un número. La culpa de esto es la incompletud de la definición habitual de «cuadrado». Pero se puede remediar este defecto estipulando que ha de entenderse como cuadrado de un objeto al objeto mismo si éste no es un número, pero que «el cuadrado de un número» ha de entenderse en sentido aritmético. Entonces, del esquema «el cuadrado de *a* es mayor que 2» se obtiene siempre una oración que expresa un pensamiento falso si ponemos en lugar de «*a*» el nombre propio de un objeto que no es un número. Una vez que se ha estipulado esto, se puede poner en la oración hipotética de nuestro ejemplo el nombre propio de cualquier objeto en lugar del numeral «3», y se obtendrá siempre una oración que expresa un pensamiento verdadero. El pensamiento general al que entonces llegamos es también verdadero. Podemos expresarlo así: «Si algo es mayor que 2, entonces su cuadrado es mayor que 2», o mejor: «Si *a* es mayor que 2, el cuadrado de *a* es mayor que 2». Aquí la locución «si» parece ser la que más concuerda con el uso lingüístico. Pero ya no tenemos dos pensamientos conectados. Si sustituimos la letra «*a*» por el nombre propio de un objeto, obtenemos una oración cuyo pensamiento aparece como un caso particular del pensamiento general, y en este caso particular tenemos presentes en el antecedente y en el consecuente dos pensamientos, aparte del pensamiento de la oración total. Podemos captarlos separadamente. Pero no podemos dividir la oración que expresa el pensamiento general sin convertir sus partes en sinsentidos. Pues la letra «*a*» confiere generalidad al contenido del todo, pero no a las oraciones que lo integran. La parte «*a* es mayor que 2» ya no expresa ningún pensamiento, ni un pensamiento verdadero ni uno falso, porque ni «*a*» puede designar un objeto al igual que lo hace un nombre propio, ni puede conferir a esa parte generalidad de contenido; no cumple fin alguno en relación con esta parte, ni contribuye en nada a ella como lo haría si, por ejemplo, le confiriera sentido. Esto mismo vale para la otra parte: «el cuadrado de *a* es mayor que 2.» La «*a*» de una parte señala a la «*a*» de la otra y, justamente por ello, no pueden separarse
207 las partes, pues, si se / hiciera, desaparecería la contribución que «*a*» proporciona al sentido del todo, y con ello se perde-

ría la finalidad de «*a*». Del mismo modo, en latín no se puede dividir una oración compuesta, cuyas oraciones integrantes vienen introducidas por «*quot*» y «*tot*», en esas oraciones integrantes sin convertirlas en sinsentidos. Digo que una oración *no es una oración propiamente dicha* cuando tiene la forma gramatical de una oración sin ser, sin embargo, expresión de un pensamiento, aunque pueda ser parte integrante de oración compuesta que sí expresa un pensamiento y a la que, por tanto, sí puede llamarse oración propiamente dicha. Según esto, en el caso de la oración general ya no se puede distinguir, como antes, entre antecedente y consecuente, puesto que antecedente y consecuente ya no son oraciones propiamente dichas, y ya no expresan pensamientos. De hecho, ahora hablamos como si en algunos casos se satisficiera la condición y en otros no. Con ello se pone de manifiesto que lo que aquí llamamos condición no es un pensamiento, puesto que un pensamiento —prescindiendo siempre del mito y la ficción— sólo es o verdadero o falso. No puede suceder que el mismo pensamiento sea unas veces verdadero y otras falso. En tales casos no se tiene una oración propiamente dicha, aunque se obtienen oraciones propiamente dichas que unas veces expresan pensamientos verdaderos, otras falsos; pero estos pensamientos son entonces distintos. Las letras que, como sucede con «*a*» en nuestro ejemplo, sirven para conferir generalidad al contenido de una oración, se distinguen esencialmente por esta finalidad de los nombres propios. Entiendo que un nombre propio designa (o se refiere a) un objeto; «*a*» indica un objeto, pero no tiene referencia, no designa o se refiere a nada. Las palabras como «algo» y «eso» desempeñan a menudo en el lenguaje natural el papel de las letras; pero a veces las letras no parecen ser substituibles en absoluto. El lenguaje es en éste, como en otros aspectos, imperfecto. Para la comprensión de lo lógico, el uso de las letras es más ventajoso que el uso lingüístico. Consideremos ahora las oraciones que no son oraciones propiamente dichas que integran nuestra oración general. Cada una de ellas contiene una letra. Si la substituimos por el nombre propio de un objeto, obtenemos de esta forma una oración propiamente dicha que, de forma manifiesta, aparece ahora compuesta de dicho nombre propio y

del resto. Este resto corresponde a la parte insaturada del pensamiento y es también parte de la oración que no es una oración propiamente dicha. Cada una de tales oraciones integrantes contiene, además de la letra, un componente que corresponde a la parte insaturada del pensamiento. Estas partes insaturadas del pensamiento son también partes de nuestro pensamiento general, pero necesitan de un medio de unión que las trabe entre sí, al igual que dos partes completas del pensamiento no pueden trabarse sin un medio de unión. Si expresamos el pensamiento general de nuestro ejemplo así: «Si *a* es mayor que 2, entonces *a* es algo cuyo cuadrado es mayor que 2», entonces las palabras «es algo cuyo cuadrado es mayor que 2» y «es mayor que 2» corresponden respectivamente a las dos partes insaturadas del pensamiento, de las que precisamente estábamos hablando. Sin embargo, este «es» tiene que ser considerado aquí como carente de fuerza asertórica. Las palabras «si» y «entonces», la letra «a» y la posición de la palabra «es», primero inmediatamente después de «*a*» y después del «entonces» es lo que corresponde al medio de unión.

208 Sin embargo, sabemos que, en realidad, este tipo peculiar de unión se realiza por medio de la negación, la formación de una conjunción, de nuevo la negación y la generalización (*sit venia verbo*).

SENTIDO Y REFERENCIA

Los nombres propios deben designar objetos, y llamamos a los objetos que designa un nombre propio su referencia. El nombre propio es, por otra parte, componente de una oración que expresa un pensamiento. Ahora bien, ¿qué tiene que ver el objeto con el pensamiento? Hemos visto, en el caso de la oración «El Mont Blanc tiene más de 4.000 m», que el objeto no es parte del pensamiento. ¿Es, en general, necesario el objeto para que la oración exprese un pensamiento? Ciertamente se dice que Ulises no es un personaje histórico, y con esta expresión contradictoria se quiere decir que el nombre «Ulises» no designa nada, no tiene referencia. Si se acepta esto, no se niega por ello que tengan conte-

nido conceptual todas las oraciones de la *Odisea* en los que aparece el nombre «Ulises». Pensemos por un momento que aceptamos que, contrariamente a la opinión que teníamos hasta ahora, el nombre «Ulises» en la *Odisea* designa a un hombre. ¿Expresarían por ello las oraciones que contienen el nombre «Ulises» otros pensamientos? Creo que no. Los pensamientos permanecerían, a decir verdad, iguales; sólo se trasladarían del ámbito de la ficción al de la verdad. Según eso, el objeto designado por un nombre propio parece ser inesencial para el contenido del pensamiento de la oración que contiene dicho nombre propio. ¡Inesencial para el contenido del pensamiento! Por lo demás, para nosotros no es lo mismo movernos en el reino de la ficción que en el de la verdad. Pero podemos ciertamente inferir de esto: que con el nombre propio tiene que estar unido algo que es distinto del objeto designado y que es esencial para el pensamiento expresado por la oración en la que aparece dicho nombre propio. Llamo a esto sentido del nombre propio. Al igual que el nombre propio es parte de la oración, su sentido es parte del pensamiento.

Otros caminos conducen a la misma meta. A menudo el mismo objeto tiene distintos nombres; pero generalmente no son intercambiables. Esto sólo se puede explicar porque nombres propios con la misma referencia pueden tener sentidos distintos. La oración «El Mont Blanc tiene más de 4.000 m» no expresa el mismo pensamiento que la oración «La montaña más alta de Europa tiene más de 4.000 m», aunque el nombre propio «Mont Blanc» designe la misma montaña que la expresión: « la montaña más alta de Europa» que, según la forma de hablar aquí propuesta, es igualmente un nombre propio. Las dos oraciones «El lucero de la tarde es el mismo que el lucero de la tarde» y «El lucero de la tarde es el mismo que el lucero de la mañana» se diferencian sólo por un nombre propio con la misma referencia. Sin embargo, expresan pensamientos distintos. El sentido del nombre propio «el lucero de la tarde» tiene que ser distinto del
209 sentido del nombre propio «el lucero de la mañana». / Resulta entonces que con el nombre propio está unido algo que es distinto de su referencia, que puede ser distinto en distintos nombres propios con la misma referencia, y que es esen-

cial para el contenido del pensamiento de la oración que contiene al nombre propio. Una oración propiamente dicha, que contiene un nombre propio, expresa un pensamiento singular, y en éste distinguimos una parte completa y otra insaturada. Aquélla corresponde al nombre propio, pero no a su referencia sino a su sentido. La parte insaturada del pensamiento la concebimos también como un sentido, es decir: el de aquella parte de la oración que es distinta del nombre propio. Y, siguiendo estas estipulaciones, podemos también concebir al pensamiento mismo como un sentido, en concreto el sentido de la oración. Al igual que el pensamiento es el sentido de la oración entera, el sentido de una parte de la oración es una parte del pensamiento. Entonces, el pensamiento resulta ser del mismo género que el sentido de un nombre propio, pero de un género completamente distinto que su referencia.

Surge ahora la cuestión de si a la parte insaturada del pensamiento, que ha de considerarse como sentido de la parte correspondiente de la oración, le corresponde algo que ha de concebirse como referencia de esta parte de la oración. En realidad, es indiferente para el mero contenido de la oración que el nombre propio tenga una referencia, pero, sin embargo, esto es de la mayor importancia al menos si nos movemos en dominios científicos. Depende de si nos hallamos en el ámbito de la ficción o en el de la verdad. Ahora bien, es bastante improbable que el nombre propio se comporte de forma tan distinta que el resto de una oración singular, que sólo en el nombre propio tenga importancia la existencia de un referente. Más bien hemos de suponer que a la parte restante de la oración, que tiene como sentido a la parte insaturada del pensamiento, ha de corresponderle algo en el reino de la referencia si el pensamiento entero ha de pertenecer al ámbito de la verdad. Además, sucede que también en esta otra parte de la oración pueden aparecer nombres propios, cuya referencia es importante. Si en una oración aparecen varios nombres propios, entonces el pensamiento correspondiente puede descomponerse de maneras distintas en una parte completa y otra insaturada. El sentido de cada uno de estos nombres propios puede contraponerse, en tanto que parte completa, a la otra parte del pensamiento, en cuan-

to que parte insaturada. También el lenguaje puede expresar los mismos pensamientos de forma distinta, haciendo que este o aquel nombre propio sea el sujeto gramatical. Se dice que estas formas de expresión distintas no son equivalentes. Esto es cierto. Pero hay que tener en cuenta que el lenguaje no sólo expresa el pensamiento, sino que también le da una especial iluminación o coloración. Y éstas pueden ser distintas aunque el pensamiento sea el mismo. Es impensable que sólo en los nombres propios sea relevante la referencia y no lo sea en las otras partes de la oración unidas a aquéllos. ¿De qué hablamos cuando decimos «Júpiter es más grande que Marte»? De los astros mismos, de los referentes de los nombres propios «Júpiter» y «Marte». Mediante las palabras «es más grande que» decimos que están en una cierta relación.
210 Esta relación se da entre / los referentes de los nombres propios y, por tanto, tiene que pertenecer ella misma al reino de la referencia. Según esto, tendremos que aceptar también que la parte de la oración «es mayor que Marte» tiene referencia y no sólo sentido. Si dividimos una oración en un nombre propio y la parte restante, entonces dicha parte restante tiene como sentido una parte insaturada del pensamiento. Llamamos concepto a su referencia. Con ello cometemos ciertamente un error que nos impone el lenguaje. Introduciendo la palabra «concepto», admitimos la posibilidad de oraciones de la forma «*A* es un concepto», donde *A* es un nombre propio. Con ello tildamos de objeto a algo que es, precisamente, de un género absolutamente diferente de él. También el artículo determinado al principio de la expresión «la referencia del resto de la oración» es incorrecto por las mismas razones. Pero el lenguaje nos impone tales imprecisiones, y así no nos queda nada más que ser conscientes de ello para no caer en el error y para que no se nos borre la estricta delimitación existente entre concepto y objeto. Podemos llamar al concepto, hablando figuradamente, insaturado, o podemos decir que tiene carácter predicativo.

Hemos considerado el caso en que una oración compuesta está formada por una (oración, que no es una oración propiamente dicha como) consecuente y por (otra oración del mismo tipo como) antecedente, donde dichas oraciones, que no son oraciones propiamente dichas, contenían una le-

tra (por ejemplo «*a*»). El resto de cada una de esas oraciones que no son oraciones propiamente dichas corresponde a una parte insaturada del pensamiento, y podemos decir, pues, que tal parte del pensamiento es el sentido de la parte correspondiente de la oración a la que hemos llamado «el resto». Dicha parte de la oración tiene un referente que hemos llamado concepto. Así, tenemos un concepto que es el referente del resto de la oración, que no es una oración propiamente dicha, que hace de antecedente, y un concepto que es el referente del resto de la oración, que no es una oración propiamente dicha, que hace de consecuente. Estos conceptos se encuentran en una unión peculiar (podríamos decir también «relación»), a la que llamaremos relación de subordinación; es decir, que el concepto del antecedente está subordinado al concepto del consecuente. Si consideramos una oración singular como compuesta de un nombre propio y de la parte restante, entonces al nombre propio le corresponde un objeto como referente, y a la parte restante un concepto, y objeto y concepto aparecen aquí en una unión o relación especial que llamamos subsunción. El objeto se subsume bajo el concepto. Está claro que la subsunción es algo totalmente distinto de la subordinación.

Hemos visto que las partes de una oración tienen referencia; ¿tiene también referencia la oración como un todo? Si nos importa la verdad, si nos movemos en el universo científico, exigiremos a todo nombre propio que aparezca en una oración que tenga referencia. Por otra parte, sabemos que es indiferente para el sentido de la oración, para el pensamiento, si sus partes tienen o no referencia; por tanto, tiene que estar unido a la oración algo distinto del pensamiento, algo para lo que es esencial el que las partes de la oración
211 tengan referencia; esto es lo que llamaremos / la referencia de la oración. Pero lo único para lo que esto es esencial es lo que llamo el valor de verdad, es decir, si el pensamiento es verdadero o falso. En el mito y en la ficción los pensamientos no necesitan tener valor de verdad. Una oración que contiene un nombre propio sin referencia no es ni verdadera ni falsa; el pensamiento que expresa pertenece a la ficción. La oración no tiene entonces referencia. Tenemos dos valores de verdad: lo verdadero y lo falso. Si una oración tiene algu-

na referencia, entonces ésta es lo verdadero o lo falso. Si se puede descomponer una oración en partes que tengan todas ellas referencia, entonces también la oración tiene referencia. Lo verdadero y lo falso han de considerarse como objetos, puesto que tanto la oración como su sentido, el pensamiento, tienen la característica de ser completos, no la de ser insaturados. Si hubiera descubierto en lugar de lo verdadero y lo falso dos elementos químicos, habría causado mayor impresión a los doctos. Si decimos «El pensamiento es verdadero», nos parece que acompaña al pensamiento la verdad como propiedad. Tendríamos entonces el caso de la subsunción. El pensamiento estaría subsumido como objeto bajo el concepto de verdad. Pero aquí nos engaña el lenguaje. No tenemos la relación del objeto con la propiedad, sino la del sentido de un signo con su referencia. En el fondo, la oración «Es verdad que 2 es un número primo», no quiere decir más que «2 es un número primo». Si emitimos un juicio en el primer caso, entonces éste no radica en la palabra «verdadero», sino en la fuerza asertórica que le damos a la palabra «es».

Pero podemos hacer lo mismo en la segunda oración, y el actor en escena podría emitir tanto la primera oración como la segunda sin fuerza asertórica[1].

---

[1] Observaciones sobre el uso de las letras en la aritmética (12 de agosto de 1906): En aritmética se usan las letras sin pronunciarse, en la mayor parte de los casos, sobre el modo, finalidad y justificación de ese uso, y sin siquiera tenerlo ellos mismos muy claro. La manera algebraica de denominar las incógnitas (permítaseme aquí esta expresión por mor de la claridad, aunque se podrían hacer objeciones) no es tan distinta de la habitual en aritmética, como podría parecer a primera vista. Hablando de manera general, en la aritmética las letras deben conferir generalidad al contenido. Pero ¿al contenido de qué? La mayoría de las veces no es a una oración singular o a una oración compuesta en el sentido de la gramática, sino a un conjunto de teoremas a primera vista totalmente independientes, cuya delimitación no siempre es fácil de reconocer. La lógica tiene que exigir que estas oraciones aparentemente independientes se unan en una única oración compuesta; pero, si se sigue esta exigencia, la mayoría de las veces se producen monstruos lingüísticos. En la conceptografía, la barra de juicio, además de indicar la fuerza asertórica, tiene la capacidad de delimitar el alcance de la generalidad de las letras latinas. Pero, para poder limitar el alcance de la generalidad, empleo letras góticas, y en ellas la concavidad indica la limitación del alcance. También en la aritmética se da a veces un uso de las letras que corresponde, aproximadamente, al de las letras góticas de mi conceptografía. Pero no he descubierto ningún indicio de

Una oración propiamente dicha es un nombre propio y su referencia, si la tiene, un valor de verdad: lo verdadero o lo falso. Podemos descomponer muchos enunciados en una
212 parte completa, que de nuevo es un nombre propio, / y una parte insaturada, que hace referencia a un concepto. Del mismo modo, podemos también descomponer muchos nombres propios, cuyos referentes no son valores de verdad, en una parte completa, que es de nuevo un nombre propio, y una parte insaturada. Si ésta ha de tener referencia, entonces una vez saturada por cualquier nombre propio dotado de referencia, ha de producirse también un nombre propio con referencia. En caso de que esto ocurra, llamamos función a la referencia de la parte insaturada. En cuanto a la inexactitud a la que nos fuerza el lenguaje, hay que hacer una salvedad semejante a la hecha anteriormente cuando introdujimos el término «concepto». La parte insaturada de una oración cuya referencia hemos llamado concepto ha de tener la propiedad de producir una oración propiamente dicha, siempre que sea saturada por cualquier nombre propio con referencia; es decir, ha de producirse el nombre propio de un valor de verdad. Ésta es la exigencia de que el concepto tenga límites nítidos. Todo objeto o cae o no cae bajo un concepto dado, *tertium non datur*. De esto se sigue una exigencia semejante para la función. Partamos como ejemplo de la oración «3 – 2 > 0». Lo descomponemos en el nombre propio «3 – 2» y el resto «   > 0». Se puede decir que esta parte insaturada se refiere al concepto de número positivo. Este concepto tiene que estar nítidamente delimitado. Todo objeto tiene que caer o no caer bajo este concepto. Descompongamos ahora el nombre propio «3 – 2» en el nombre propio «2» y la parte insaturada «3 –   ». Ahora podemos descomponer la oración original «3 – 2 > 0» en el nombre propio «2» y la parte insaturada «3 –   > 0». Su referencia es el con-

---

que alguien sea consciente de que este uso sea algo especial. Probablemente la mayoría de los matemáticos no sabrían, si leyeran esto, a qué estoy haciendo alusión. Yo mismo me he dado cuenta de ello muy tarde. El pensamiento depende en gran medida de medios auxiliares externos y, antes de que ciertas diferencias puedan ponerse de manifiesto, sería necesario al menos sustituir el lenguaje natural por un instrumento más útil. Pero los académicos han renunciado hasta ahora a hacer suyos estos medios.

cepto de lo que sustraído a 3 da como resultado un número positivo. Este concepto tiene que tener también límites nítidos. Ahora bien, si hubiera un nombre propio a que tuviese referencia, tal que una vez saturada con él la parte insaturada «3 – » no se produjera un nombre propio con referencia, entonces la parte insaturada «3 – > 0», una vez saturada por a, tampoco produciría una oración propiamente dicha; es decir: no se podría decir si el objeto designado por a caería bajo el concepto que constituye la referencia de «3 – > 0». De donde se sigue que las explicaciones habituales de los signos aritméticos son insuficientes.

CARTAS A HUSSERL*

1906

101 Jena
30 de octubre a 1 de noviembre de 1906

Querido colega:

A la vez que le doy muchas gracias por el amable envío de su artículo[a], permítame que le haga llegar algunas observaciones que se me han ocurrido mientras que lo leía, puesto que no tengo tiempo de entrar en el asunto de manera más detallada.

Los lógicos hacen muchas distinciones sobre los juicios que me parecen irrelevantes y, por otro lado, tienden a no hacer muchas distinciones que considero importantes. Me parece que los lógicos se abrazan demasiado al lenguaje y a la gramática y están demasiado enmarañados en la psicología. Esto es, a lo que parece, lo que les impide estudiar mi conceptografía, que podría tener sobre ellos un efecto liberador. Encuentran que mi conceptografía no representa co-

---

* Estas dos cartas de Frege dirigidas a E. Husserl fueron publicadas en G. Frege (1976), *Wissenschaftlicher Briefwechsel*, Felix Meiner, Hamburgo, pp. 101-106. La relación entre Frege y Husserl se enfrió después de la ciertamente demoledora recensión que el primero hizo de la *Filosofía de la Aritmética* de Husserl. Estas cartas probarían que, después de doce años, la relación entre ambos reverdeció de alguna manera. En el texto que sigue se encuentra uno de los pocos criterios de identidad de pensamientos que Frege formuló.

[a] Según los editores de la correspondencia de Frege, se trata del quinto artículo perteneciente a la serie *Bericht über deutsche Schriften zur Logik in den Jahren 1895-99*, publicado en *Archiv für systematische Philosohie*, X (1904), pp. 101-125. Este artículo consiste en una discusión crítica de la obra de Anton Marty *Über sujektlose Sätze und das Verhältnis der Grammatik zur Logik und psychologie*, artículos sexto y séptimo, publicados en *Vierteljahrsschrift für wissenschaftliche Philosophie*, XIX (1895), pp. 19-87 y 263-334.

rrectamente los procesos mentales; y tienen razón, pues éste no es en absoluto su propósito. Si ocasiona procesos mentales enteramente nuevos, esto no frustra en absoluto su propósito. Parece que aún se considera como tarea de la lógica el estudiar ciertos procesos mentales. Realmente, la lógica no tiene mucho más que ver con ellos que con los movimientos de los cuerpos celestes. No es, en ningún sentido,
102 parte de la psicología. El teorema de Pitágoras expresa / el mismo pensamiento para todos los hombres, mientras que cada uno tiene sus propias representaciones, sentimientos, decisiones, que son diferentes de las de cualquier otro. Los pensamientos no son entidades mentales, y pensar no consiste en generar internamente tales entidades, sino en captar pensamientos que ya están presentes de modo objetivo. Deberían hacerse sólo aquellas distinciones que tienen que ver con las leyes de la lógica. En mecánica gravitacional nadie estaría dispuesto a distinguir los cuerpos de acuerdo con sus propiedades ópticas. Al objeto y al concepto no se les distingue en absoluto, o demasiado escasamente. Desde luego, si ambos son representaciones en el sentido psicológico, la diferencia difícilmente puede percibirse. Esto está conectado con la distinción entre conceptos de primero y segundo nivel, pero ¿quién entre los lógicos sabe algo de ella? En lógica, uno tiene que decidir considerar las proposiciones equipolentes como algo que difiere sólo de acuerdo con su forma. Una vez que se sustrae la fuerza asertórica con la que se han emitido, las proposiciones equipolentes tienen algo en común por lo que respecta a su sentido, y esto es lo que llamo el pensamiento que expresan. Esto es lo único que interesa a la lógica. Al resto lo llamo la coloración y la iluminación del pensamiento. Una vez que decidimos dar este paso, nos desembarazamos de un plumazo de una masa confusa de distinciones inútiles y de la oportunidad de embarcarnos en disputas incontables que, en su mayor parte, no pueden decidirse de manera objetiva. Y damos rienda suelta a la posibilidad de proseguir con los análisis lógicos adecuados. Juzgada desde el punto de vista psicológico, la proposición a analizar es, desde luego, diferente de la proposición analizada, y todo el análisis lógico puede detenerse por la objeción de que dos proposiciones son meramente equipolentes,

si esta objeción se acepta de modo efectivo. Pues no será posible establecer un límite claramente reconocible entre proposiciones meramente equipolentes y congruentes. Incluso las proposiciones que parecen congruentes cuando se presentan impresas pueden pronunciarse con entonación diferente y no son, por tanto, equivalentes en todos y cada uno de sus aspectos. Sólo ahora que se ha vuelto posible el análisis lógico adecuado, pueden reconocerse los elementos lógicos, y podemos ver el claro del bosque. Todo lo que se necesitaría sería un única proposición-modelo para cada sistema de proposiciones equipolentes, y cualquier pensamiento podría comunicarse por medio de tal proposición-modelo. Pues dada una proposición-modelo, todo el mundo tendría el sistema total de proposiciones equipolentes, y podría pasar a cualquiera de ellas cuya iluminación fuese particularmente de su gusto. No puede ser la tarea de la lógica investigar el lenguaje y determinar lo que está contenido en una expresión lingüística. Aquel que quiere aprender lógica a partir del lenguaje es como el adulto que quiere aprender cómo pensar a partir de un niño. Cuando los hombres crearon el lenguaje estaban en un estadio de pensamiento figurativo infantil. Los lenguajes no están hechos para encajar con la vara de medir de la lógica. Incluso el elemento lógico del lenguaje parece estar oculto bajo figuras que no siempre son exactas. En un primer estadio de la creación del lenguaje tuvo lugar, a lo que parece, una tremenda exuberancia de formas lingüísticas. En una época posterior, mucho de esto tuvo que eliminarse y simplificarse. La principal tarea de la
103 lógica es / librarse del lenguaje y simplificarlo. La lógica debería ser el juez de los lenguajes. Deberíamos, o bien limpiar la lógica tirando por la borda la distinción entre sujeto y predicado, o restringir estos conceptos a la relación que tiene un objeto de caer bajo un concepto (subsunción). La relación de subordinación de un concepto respecto de otro es tan diferente que tampoco es permisible en este caso hablar de sujeto y predicado.

Con respecto a las proposiciones combinadas mediante «y» y «ni ... no» (p. 121) estoy esencialmente de acuerdo con usted. Yo lo expresaría así: la combinación de dos proposiciones mediante «y» corresponde a la combinación de

dos pensamientos en uno, que puede negarse en su totalidad y también puede aceptarse como verdadero.

Con respecto a la cuestión de si la proposición «Si *A* entonces *B*» es equipolente con la proposición «No es el caso que *A* sin *B*», tendría que decir lo siguiente[b]. En una construcción hipotética tenemos, de modo general, proposiciones (que no son proposiciones propiamente dichas) de tal género que ni el antecedente ni el consecuente expresan por sí mismos un pensamiento, sino solamente un complejo proposicional. Cada proposición es sólo entonces una parte componente indicativa, y cada proposición indica a la otra (*tot* ... *quot* ...). En matemáticas, tales partes componentes son, a menudo, letras (si $a > 1$, entonces $a^2 > 1$). Toda la proposición adquiere por ello el carácter de una ley, a saber: generalidad de contenido. Pero supongamos, en primer lugar, que las letras «*A*» y «*B*» están por proposiciones propiamente dichas. Entonces, no sólo hay casos en los que *A* es verda-
104 dera y casos en los que *A* es falsa, sino que / o bien *A* es verdadera o *A* es falsa; *tertium non datur*. Lo mismo vale para *B*. Tenemos entonces las combinaciones siguientes:

A es verdadera y *B* es verdadera,
A es verdadera y *B* es falsa,
A es falsa y *B* es verdadera,
A es falsa y *B* es falsa.

---

[b] De acuerdo con los editores, Husserl está criticando aquí el punto de vista de Marty de que las dos proposiciones tienen «idéntico sentido». Además de negar que sean «congruentes» Husserl niega también que sean «equivalentes (equipolentes)». Dos proposiciones son, de acuerdo con Husserl, equipolentes, si la negación de las dos da «algo equivalente». Ahora bien, Husserl mantiene que la negación de «Si *A* entonces *B*» produce como resultado «*A puede* valer sin que *B* valga», y la negación de «No es el caso que *A* (*A* no vale) sin que valga *B*» da como resultado «*A* vale sin que *B* valga». Ésta es la razón por la que, para Husserl, las dos proposiciones no son equipolentes. En términos actuales, el análisis de Husserl difiere del de Frege en que Frege considera «si ... entonces» como implicación *material*, mientras que Husserl parece concebirla como implicación *estricta*. En términos de implicación estricta «si ... entonces» puede explicarse como «No es posible que *A* valga sin que *B* valga». Si esto se reemplaza por «Puede ser el caso que *A* valga sin que valga *B*», puede usarse entonces, en vez de la formulación anterior de Husserl, la siguiente: «*A* puede valer sin que valga *B*».

De éstas, la primera, tercera y cuarta son compatibles con la proposición «Si *A* entonces *B*», pero no la segunda. Por lo tanto, obtenemos por negación[c]: *A* es verdadera y *B* falsa; o *A* vale sin que *B* valga, lo mismo que en el lado derecho[d].

Supongamos en segundo lugar que las letras «*A*» y «*B*» están por proposiciones que no son proposiciones propiamente dichas; entonces es mejor que reemplacemos «*A*» y «*B*» por $\Phi(a)$ y $\Psi(b)$, donde «*a*» es a parte componente indicativa. La proposición «Si $\Phi(a)$ entonces $\Psi(a)$» tiene ahora generalidad de contenido, y su negación cancela esta generalidad y dice que hay un objeto (digamos Δ), tal que $\Phi(\Delta)$ es verdadera y $\Phi(\Delta)$ es falsa. Esto es presumiblemente lo que usted quiere decir con las palabras «*A* podría valer sin que *B* valiese»[e]. La proposición «$\Phi(a)$ no vale sin que valga $\Psi(a)$», se entiende ahora de la manera siguiente: «en general, sea *a* lo que sea, $\Phi(a)$ no vale sin que valga $\Psi(a)$». Por negación obtenemos: «No es en general el caso que, sea *a* lo que sea, $\Phi(a)$ no valga sin que valga $\Psi(a)$». En otras palabras: «Hay al menos un objeto (digamos Δ) tal que $\Phi(\Delta)$ es verdadera mientras que $\Psi(\Delta)$ es falsa». Obtenemos lo mismo en el lado izquierdo. En cada caso, tenemos una equipolencia. Si consultamos mi *Conceptografía*, que ya tiene veintiocho años, encontraremos la respuesta a esta cuestión

---

[c] «Negación» se aplica aquí a «Si *A* entonces *B*». De este modo, Frege aplica aquí el procedimiento mencionado por Husserl, de comparar la negación de las dos proposiciones. [*Nota de los editores alemanes.*]

[d] Tenemos que imaginar que las dos proposiciones «Si *A* entonces *B*» y «No es el caso que *A* sin *B*» están combinadas en una ecuación cuyo lado izquierdo es (en principio) la proposición «Si *A* entonces *B*), y cuyo lado derecho es (en principio) la proposición «No es el caso que *A* sin *B*». Esto corresponde a la ecuación usada por Husserl. Si, como hace Frege, interpretamos el lado izquierdo como una implicación material, entonces los dos lados coinciden después de la negación, de acuerdo con el análisis de Frege. [*Nota de los editores alemanes.*]

[e] Esta suposición de Frege es sólo parcialmente correcta, como lo muestra el artículo de Husserl citado en la nota *a*, pp. 122, nota 11. Husserl distingue allí los casos en los que *A* y *B* «se refieren» a proposiciones y aquellos en los que «se refieren» a conceptos; aquellos casos que, por consiguiente, Frege quiere distinguir aquí. De acuerdo con esto, Husserl no reserva la forma con «puede», contrariamente a lo que supone Frege, para el último caso, sino que la extiende también al primero, que tiene entonces que ser interpretado como implicación estricta. El último caso se llama también «implicación formal» de acuerdo con Russell yWhitehead (*Principia Mathematica*, I, pp. 22 ss.). [*Nota de los editores alemanes.*]

105 sin más comentario. Ahora bien, ¿son también / congruentes esas proposiciones? Esto podría debatirse durante cien o más años. Al menos, no veo que haya un criterio que nos permita decidir esta cuestión objetivamente.

Pero considero que si no hay un criterio objetivo para responder a una cuestión, entonces la cuestión no tiene lugar alguno en la ciencia.

Sinceramente,
G. Frege

* * *

Jena
9 de diciembre de 1906

Querido colega:

Muchas gracias por su carta del 16 de noviembre[f] que me induce a hacerle las observaciones siguientes.

Me parece que es necesario un criterio objetivo para reconocer de nuevo como el mismo a un pensamiento, pues sin él el análisis lógico es imposible. Ahora bien, me parece que el único medio de decidir si una proposición *A* expresa el mismo pensamiento que una proposición *B* es el siguiente (y aquí supongo que ninguna de las dos proposiciones contiene en su sentido una parte componente que sea lógicamente autoevidente). Si la suposición *conjunta* de que el contenido de *A* es falso y el contenido de *B* es verdadero *y* la suposición de que el contenido de *A* es verdadero y el de *B* falso llevan a una contradicción lógica, y sin que se requiera

[f] La carta de Husserl del 16 de noviembre se ha perdido, junto con otra del 10 de noviembre. Estas dos cartas contenían la réplica de Husserl a la carta de Frege de fecha 30 de octubre a 1 de noviembre. De acuerdo con Scholz, la primera carta trataba de las «proposiciones "equipolentes" y de la "coloración"», así como de la lógica en general, mientras que la segunda carta trataba de «las paradojas», probablemente de la paradoja de Russell. Del 21 de diciembre de 1906 al 13 de enero de 1907 Husserl escribió otra carta a Frege, dividida en dos partes, que también se ha perdido. La primera parte era una continuación de la carta de Husserl del 16 de noviembre y contenía observaciones sobre «las paradojas» y «las estructuras hipotéticas». La segunda era la respuesta a esta carta.

nada más que leyes puramente lógicas para este propósito, entonces nada puede pertenecer al contenido de A, en la me-
106 dida en que / sea capaz de ser juzgada como verdadera o falsa, que no pertenezca también al contenido de B; pues no habría razón alguna para que hubiera un resto de este tipo en el contenido de B y, de acuerdo con la presuposición anterior, tal resto no sería tampoco autoevidente. Del mismo modo, dado nuestro supuesto, nada puede pertenecer al contenido de B, en la medida en que puede ser juzgado como verdadero o falso, excepto lo que pertenece también al contenido de A. Así pues, lo que es capaz de ser juzgado como verdadero o falso en los contenidos de A y B es idéntico, y esto es un asunto que concierne sólo a la lógica; a esto es a lo que llamo el pensamiento expresado tanto por A como por B. De hecho, se pueden contar muchos géneros de cosas como parte del contenido de A, por ejemplo, el modo, los sentimientos, las representaciones; pero nada de esto se juzga como verdadero o falso; en el fondo, no se trata de un asunto que interese a la lógica, lo mismo que lo que no puede juzgarse como moralmente bueno o malo no interesa a la ética. ¿Hay otro medio de juzgar qué parte del contenido de una proposición está sujeto a la lógica, o cuando dos proposiciones expresan el mismo pensamiento? No lo creo. Si no disponemos de tales medios, podemos argumentar sin fin sobre cuestiones lógicas sin resultado alguno.

Tengo otras dudas sobre lo siguiente. Usted escribe: «La forma que contiene "todo" se entiende normalmente de tal manera que la existencia de objetos que caen bajo los conceptos de sujeto y predicado es parte de lo que se quiere decir y se presupone que se ha admitido de antemano.» Me parece que sólo se puede dar este sentido que usted quiere que tenga si se eliminan las palabras «parte de lo que se quiere decir». Pues, si la existencia fuese parte de lo que se quiere decir, entonces la negación de la proposición «Todos los *m* son *n*» sería: «Hay un *m* que no es *n*, o no hay ningún *m*». Pero me parece que esto no es lo que usted quiere. Usted quiere que se presuponga que la existencia ha sido admitida de antemano, pero no que sea parte de lo que se quiere decir. Ahora bien, yo uso las expresiones que contienen «todo» de tal manera que la existencia no es ni parte de lo que quiero

decir, ni algo que presupongo que haya sido admitido de antemano. El uso lingüístico no puede ser aquí absolutamente decisivo, puesto que no necesitamos interesarnos por lo que sea el uso lingüístico. En lugar de ello, podemos dejar de lado nuestro uso lingüístico en lógica de acuerdo con nuestras necesidades lógicas. La razón para dejar de lado ese uso es la simplicidad. Si una forma de expresión, como la que contiene «todo», ha de usarse como forma fundamental en las consideraciones lógicas, no es factible usarla de manera que exprese dos pensamientos distintos al mismo tiempo, a menos que la proposición conste de dos proposiciones unidas por «y». Pues uno debe siempre aspirar a retrotraerse a los elementos, a lo simple. Debe ser posible siempre expresar el pensamiento principal sin pensamientos concomitantes. Ésta es la razón por la que no quiero que el pensamiento concomitante de la existencia sea parte de lo que quiero decir cuando uso una expresión que contenga «todo».

Como siempre,

Sinceramente,
G. Frege

EL PENSAMIENTO: UNA INVESTIGACIÓN LÓGICA*

58 Así como la palabra «bello» señala la dirección de la estética y «bueno» la de la ética, del mismo modo «verdadero» señala la de la lógica. Todas las ciencias tienen la verdad como meta, pero la lógica se ocupa de ella de una manera completamente diferente. Se comporta respecto de la verdad más o menos del mismo modo que la física respecto del peso o del calor. Es tarea de todas las ciencias descubrir verdades: a la lógica le toca decretar las leyes del ser verdad. La palabra «ley» se usa en dos sentidos. Cuando hablamos de leyes morales o de leyes civiles, nos referimos a prescripciones que han de ser obedecidas, con las cuales los acontecimientos no están siempre de acuerdo. Las leyes de la naturaleza son lo general de los acontecimientos naturales, a lo que siempre se adecuan éstos. Es más bien en este sentido en el que hablo de leyes del ser verdad. Desde luego, no se trata aquí de un acontecer, sino de un ser. Pues de las leyes del ser verdad se siguen prescripciones para el afirmar, pensar, juzgar, inferir. Y, así, es posible hablar también de leyes del pensamiento. Pero aquí acecha el peligro de mezclar cosas distintas. La expresión «ley del pensamiento» se entiende quizás por analogía con «ley de la naturaleza», queriendo hacer referencia mediante ella a lo general de los acontecimientos mentales del pensar. Una ley del pensamiento sería,

* Este trabajo apareció originalmente como «Der Gedanke. Eine logische Untersuchung» y fue publicado en *Beiträge zur Philosophie des deutschen Idealismus*, 1, 1918-1919, pp. 58-77. Estaba concebido como el primer capítulo de un libro titulado *Logische Untersuchungen* (*Investigaciones lógicas*), el intento más logrado por parte de Frege de exponer de manera sistemática sus tesis sobre filosofía del la lógica. Es quizás la mejor exposición que Frege hizo nunca de su rechazo del psicologismo en lógica.

en este sentido, una ley psicológica. Y así se podría llegar a creer que la lógica trata del proceso mental del pensar y de las leyes psicológicas de acuerdo con las cuales éste tiene lugar. Pero esto sería no comprender la tarea de la lógica, puesto que la verdad no ocupa aquí el lugar que le corresponde. El error, la superstición tienen sus causas al igual que el conocimiento correcto. Tanto el tomar por verdadero lo
59 falso / como el tomar por verdadero lo verdadero se lleva a cabo de acuerdo con leyes psicológicas. Una derivación a partir de esas leyes, y una explicación de un proceso mental que finaliza en un tomar por verdadero, no puede jamás reemplazar a una demostración de aquello hacia lo que apunta ese tomar por verdadero. ¿No pueden haber tomado parte también en ese proceso mental leyes lógicas? No quiero discutir esto, pero, cuando de la verdad se trata, la posibilidad puede no ser suficiente. Es también posible que en el proceso haya intervenido algo no lógico y lo haya apartado de la verdad. Solamente podremos decidir esto una vez que hayamos llegado a conocer las leyes del ser verdad; pero, entonces, probablemente podríamos prescindir de la derivación y explicación del proceso mental, si estamos interesados en decidir si el tomar algo por verdadero —que es aquello en lo que el proceso finaliza— está justificado. Para evitar cualquier mala comprensión e impedir que se borre la frontera entre la lógica y la psicología, asigno a la lógica la tarea de encontrar las leyes del ser verdad, no las del tomar algo por verdadero o las del pensar. En las leyes del ser verdad se despliega el significado de la palabra «verdad».

Pero en primer lugar intentaré dibujar a grandes rasgos aquello a lo que, en este contexto, quiero llamar verdadero. Así pueden excluirse maneras de usar nuestra palabra que no vienen al caso. No ha de usársela aquí en el sentido de «sincero» o «veraz», ni tampoco, como aparece algunas veces en el tratamiento de cuestiones artísticas, cuando, por ejemplo, se habla de la verdad en el arte, cuando se proclama que la verdad es la meta del arte, cuando se habla de la verdad de una obra de arte o de un sentimiento verdadero. También se coloca la palabra «verdadero» delante de otra palabra a fin de mostrar que esta última se la ha de entender en su sentido genuino y no falseado. Esta manera de usarla

queda también fuera del camino que aquí se sigue; antes bien, trátase aquí de la verdad cuyo conocimiento se establece como meta a la ciencia.

La palabra «verdadero» aparece lingüísticamente como adjetivo. En ello se pone de manifiesto el deseo de delimitar más estrictamente la región dentro de la cual puede predicarse la verdad, la región en la que la verdad puede, en suma, entrar en consideración. A la verdad se la encuentra predicada de figuras, representaciones, oraciones y pensamientos. Resulta chocante que las cosas visibles y las cosas audibles vayan aquí juntas con las cosas que no pueden ser percibidas por los sentidos. Esto indica que se han producido desplazamientos de sentido. ¡Y tanto que se han producido! ¿Es entonces una figura, como mera cosa visible o tangible, propiamente verdadera, y una piedra, una hoja, no verdaderas? Obviamente no se llamaría a una figura verdadera si no hubiese en ella una intención. La figura ha de representar algo. Tampoco a la representación en sí se la denomina verdadera, sino solamente teniendo en cuenta la intención de que debe corresponder a algo. Según esto, puede suponerse que la verdad consiste en una correspondencia entre la figura y aquello de lo que es figura. Una correspondencia es una relación. Pero esto va en contra de la manera de usar la palabra «verdadero», que no es una palabra que señale una relación ni contiene indicación alguna de nada más con lo que algo haya de estar en correspondencia. Si no sé que una figura intenta representar la catedral de Colonia, entonces tampoco
60 sé / con qué tengo que comparar la figura para decidir sobre su verdad. Además, una correspondencia sólo puede ser perfecta cuando las cosas que están en correspondencia coinciden ; por consiguiente, cuando no son en absoluto cosas diferentes. Se podría comprobar la autenticidad de un billete de banco superponiéndolo estereoscópicamente a uno auténtico. Pero sería ridículo intentar superponer estereoscópicamente una moneda de oro a un billete de veinte marcos. Sólo sería posible superponer una representación a una cosa si la cosa fuese también una representación. Y entonces, si la primera correspondiese perfectamente con la segunda, ambas coincidirían. Pero esto no es precisamente lo que se quiere decir cuando se define la verdad como corresponden-

cia de una representación con algo real. Para esto es completamente esencial que lo real sea distinto de la representación. Pero entonces no puede haber correspondencia completa, verdad completa. Así pues, nada en absoluto sería verdadero, puesto que lo que es solamente verdadero a medias no es verdadero. La verdad no admite un más o menos. ¿O si? ¿No se podría mantener que hay verdad cuando se da correspondencia en un determinado aspecto? Pero ¿en cuál? Pues, entonces, ¿qué deberíamos hacer para poder decidir si algo es verdadero? Deberíamos indagar si era verdadero que, pongamos por caso, una representación y una realidad se corresponden en el aspecto establecido. Y con esto estaríamos otra vez ante una pregunta del mismo género y el juego podría empezar de nuevo. Así fracasa el intento de explicar la verdad como correspondencia. Y así fracasa también cualquier otro intento de definir el ser verdad. Pues en una definición han de especificarse determinadas características. Y al aplicarlas a un caso particular siempre surgiría la cuestión de si era verdad que esas características se dan. De este modo nos moveríamos en un círculo. Así pues, resulta verosímil que el contenido de la palabra «verdadero» sea completamente *sui generis* e indefinible.

Cuando se predica verdad de una figura, no se quiere adscribir ciertamente una propiedad que le pertenezca a esa figura de manera totalmente independiente de otras cosas, sino que se tiene presente algo totalmente distinto, y lo que se quiere decir es que la figura se corresponde de alguna manera con ese objeto. «Mi representación se corresponde con la catedral de Colonia» es una oración, y ahora se trata de la verdad de esa oración. Así pues, lo que un tanto abusivamente se llama la verdad de figuras y representaciones se reduce a la verdad de oraciones. ¿A qué se llama oración? A una sucesión de sonidos, pero solamente cuando ésta tiene sentido, con lo cual no se ha dicho que cualquier sucesión de sonidos con sentido sea una oración. Y cuando llamamos a una oración verdadera nos referimos realmente a su sentido. Así pues, resulta que aquello respecto de lo cual la verdad puede entrar en consideración es el sentido de una oración. Ahora bien, ¿es el sentido de una oración una representación? En cualquier caso el ser verdadero no consiste en la

correspondencia del sentido con algo distinto; en caso contrario, la pregunta por lo verdadero se repetiría *ad infinitum*.

Llamo pensamiento, sin querer dar con esto una definición, a algo para lo cual la verdad puede entrar en consideración. Cuento entre los pensamientos tanto lo que es falso
61 / como lo que es verdadero[1]. Así puedo decir: el pensamiento es el sentido de una oración, sin querer aseverar con esto que el sentido de toda oración sea un pensamiento. El pensamiento, imperceptible en sí, se viste con el ropaje perceptible de la oración, con lo que somos capaces de captarlo. Decimos que una oración expresa un pensamiento.

El pensamiento es algo imperceptible, y todas las cosas capaces de ser percibidas por los sentidos se excluyen de la región de cosas respecto de las cuales la verdad puede entrar en consideración. La verdad no es una propiedad que responda a un género especial de impresiones sensoriales. Así se diferencia nítidamente de las propiedades que denominamos con las palabras «rojo», «amargo», «aroma de lilas». Pero ¿no vemos que el Sol ha salido ? ¿Y no vemos también con ello que esto es verdad? Que el Sol ha salido no es ningún objeto que emita rayos que alcancen mis ojos, no es ninguna cosa visible como el Sol mismo. Se reconoce que es verdadero que el Sol ha salido sobre la base de impresiones sensoriales. Pero ser verdadero no es ninguna propiedad sensorial, perceptible. También se reconoce que algo es magnético sobre la base de impresiones sensoriales, a pesar de que esa propiedad no responda —como tampoco la verdad— a ningún género particular de impresiones sensoriales. En esto concuerdan estas propiedades. Pero para reconocer un cuerpo como magnético necesitamos impresiones

[1] Similarmente se ha dicho «Un juicio es algo que es verdadero o falso». De hecho, uso la palabra «pensamiento» en el sentido que más o menos tiene «juicio» en los escritos de los lógicos. Espero que, en lo que sigue, se comprenda por qué prefiero la palabra «pensamiento». Se ha criticado tal explicación porque en ella se dividen los juicios en verdaderos y falsos, una división que quizás sea, de entre todas las divisiones posibles de los juicios, la menos significativa. No puedo admitir como defecto lógico el que al mismo tiempo que la explicación se dé una división. Por lo que concierne a la significatividad de la división, puede que no haya de ser tan despreciable si, como hemos dicho, la palabra «verdadero» señala la dirección de la lógica.

sensoriales. Si, por el contrario, encuentro que es verdadero que en este momento no huelo nada, esto no lo hago basándome en impresiones sensoriales.

En todo caso, conviene pensar que no podemos reconocer una propiedad de una cosa sin que al mismo tiempo encontremos que es verdadero el pensamiento de que esa cosa tiene esa propiedad. Así, a cada propiedad de una cosa está ligada una propiedad de un pensamiento, es decir: la de la verdad. Vale la pena advertir también que la oración «Huelo aroma de violetas» tiene justamente el mismo contenido que la oración «Es verdad que huelo aroma de violetas». Así pues, parece que no se ha añadido nada al pensamiento porque le adjunte la propiedad de la verdad. Pero, con todo, ¿no se produce un gran resultado cuando después de muchas dudas y trabajosas investigaciones el científico puede finalmente decir: «Lo que había conjeturado es verdadero»? El significado de la palabra «verdadero» parece ser completamente *sui generis*. ¿No estaremos, por lo demás, habiéndonoslas con algo que en absoluto puede llamarse una propiedad en el sentido ordinario? A pesar de esta duda, continuaré, en principio, expresándome, según el uso lingüístico,
62 / como si la verdad fuese una propiedad, hasta que encuentre algo más adecuado.

Con vistas a poner de relieve más nítidamente lo que llamo pensamiento, voy a distinguir géneros de oraciones[2]. A una oración imperativa no se le ha de negar un sentido, pero ese sentido no es tal que la verdad pueda entrar para él en consideración. Por tanto, no llamaré pensamiento al sentido de una oración imperativa. Del mismo modo se excluyen las oraciones que expresan deseos y peticiones. Se pueden tener en cuenta las oraciones en las que se comunica o se asevera algo. Pero no cuento aquí las exclamaciones, en las que uno da rienda suelta a sus sentimientos, ni suspiros, gemidos o risas a no ser que se haya determinado mediante una convención especial el comunicar algo mediante ellas. Pero

[2] No uso aquí la palabra «oración» completamente en el mismo sentido que la gramática, que también incluye oraciones subordinadas. Una oración subordinada aislada no tiene siempre un sentido para el que la verdad pueda entrar en consideración, mientras que la oración compuesta, a la que pertenece, tiene tal sentido.

¿qué sucede con las oraciones interrogativas? Con una palabra interrogativa (*Wortfrage*)[a] emitimos una oración incompleta que solamente ha de alcanzar un verdadero sentido por medio del complemento que estamos pidiendo. Las palabras interrogativas quedan aquí, por consiguiente, fuera de consideración. Distinto es el caso de las oraciones interrogativas. Esperamos oír «sí» o «no». La respuesta «sí» significa lo mismo que una oración asertórica, pues mediante ella el pensamiento que ya estaba completamente contenido en la oración interrogativa se presenta como verdadero. Así pues, puede formarse para cada oración asertórica una oración interrogativa. Por consiguiente, a una exclamación no se la ha de considerar como un medio de transmitir información, puesto que no puede formarse la correspondiente oración interrogativa. Una oración interrogativa y una oración asertórica contienen el mismo pensamiento, pero la oración asertórica contiene también algo más: a saber: la aserción. También la oración interrogativa contiene algo más: una petición. En una oración asertórica hay que distinguir, por consiguiente, dos cosas: el contenido que tiene en común con la correspondiente oración interrogativa, y la aserción. Aquél es el pensamiento o, por lo menos, contiene al pensamiento. Así es posible expresar un pensamiento sin proponerlo como verdadero. En una oración asertórica ambas cosas van tan ligadas que es fácil pasar por alto la posibilidad de separarlas. Distinguimos, por consiguiente:

1. La captación del pensamiento: el pensar.
2. El reconocimiento de la verdad del pensamiento: el juzgar[3].
3. La manifestación de ese juicio: el aseverar.

[a] Frege debe de estar refiriéndose aquí a preguntas que empiezan por las expresiones interrogativas «¿qué?», «¿quién?» o «¿dónde?», etc.

[3] Me parece que hasta aquí no se ha distinguido suficientemente entre juicio y pensamiento. El lenguaje induce quizás a ello. Ciertamente no tenemos en las oraciones asertóricas ninguna parte de ellas que corresponda a la aserción, sino que el hecho de que se asevere algo reside en la forma de la oración asertórica. En alemán tenemos una ventaja: que la oración principal y la oración subordinada se diferencian por el orden de las palabras. Desde luego ha de observarse en relación con esto que una oración subordinada puede contener también una aserción y que

Cuando formamos una oración interrogativa, hemos realizado ya el primer acto. Un progreso en ciencia acontece usualmente así: en primer lugar se capta un pensamiento que puede ser expresado eventualmente en una oración interrogativa; después de esto, tras llevar a cabo ciertas investigaciones, ese pensamiento se reconoce finalmente como ver-
63 dadero, En la / forma de una oración asertórica expresamos la aceptación de la verdad. Para esto no necesitamos la palabra «verdadero». E incluso cuando la usamos la fuerza asertórica no reside en ella, sino en la forma de la oración asertórica, y, cuando ésta pierde su fuerza asertórica, la palabra «verdadero» no puede restablecérsela. Esto sucede cuando no hablamos en serio. Así como el tronar en el teatro es solamente tronar aparente y la lucha en el teatro es solamente lucha aparente, así también la aserción en el teatro es solamente aserción aparente. Se trata solamente de escenificación, de ficción. El actor, al representar su papel, no asevera nada; tampoco miente, aun cuando diga algo de cuya falsedad esté convencido. En la ficción tenemos el caso de pensamientos que se expresan sin que, a pesar de la forma de la oración asertórica, sean realmente propuestos como verdaderos, aunque se pueda sugerir al oyente que él mismo debe dar un juicio aprobatorio. Por tanto, también cuando algo se presente bajo la forma de una oración asertórica, ha de preguntarse siempre si contiene realmente una aserción. Y esta pregunta ha de responderse negativamente cuando falta la necesaria seriedad. Carece de importancia el que se use aquí la palabra «verdadero».

De este modo se explica que no parezca añadírsele nada al pensamiento si se le agrega la propiedad de verdad.

Una oración asertórica contiene a menudo, además del pensamiento y de la aserción, una tercera cosa a la que la aserción no se extiende. Con ella se pretende en no pocas ocasiones actuar sobre los sentimientos, el estado de ánimo del oyente o estimular su imaginación. Palabras tales como «desgraciadamente» o «afortunadamente» pertenecen a esta

---

frecuentemente ni una oración principal por sí misma, ni una oración subordinada por sí misma, sino solamente la oración compuesta, expresan un pensamiento completo.

clase. Tales componentes de la oración son más fuertemente prominentes en poesía, pero tampoco están completamente ausentes en la prosa. Aparecen más raramente en las exposiciones de matemáticas, física y química que en las de historia. Las denominadas ciencias del espíritu están más cerca de la poesía y son, por tanto, menos científicas que las ciencias estrictas que son más áridas cuanto más estrictas; pues las ciencias estrictas se dirigen hacia la verdad y sólo hacia la verdad. Por tanto, todos los componentes de la oración a los que la fuerza asertórica no se extiende no pertenecen a la exposición científica; pero muchas veces estos componentes son difíciles de evitar, incluso para aquel que ve el peligro que llevan aparejado.

Cuando de lo que se trata es de aproximarse por medio de insinuaciones a aquello que no es posible captar por medio del pensamiento, esos componentes están completamente justificados. Cuanto más rigurosamente científica sea una exposición, menos discernible será la nacionalidad de su autor y tanto más fácil será traducirla. Por el contrario, los componentes del lenguaje hacia los cuales estoy llamando aquí la atención hacen que la traducción de la poesía sea muy difícil e incluso hacen casi siempre imposible una traducción perfecta; puesto que es justamente en aquello en lo que se basa en una gran parte el valor poético en lo que más se diferencian los lenguajes.

El que yo use la palabra «caballo» o «corcel» o «rocín» o «jamelgo», no introduce ninguna diferencia en el pensamiento. La fuerza asertórica no se extiende hasta aquello por lo que esas palabras difieren. Lo que en un poema puede llamarse ambiente, perfume, iluminación, lo que es retratado por la cadencia y el ritmo, no pertenece al pensamiento.

64 Hay muchas cosas en el lenguaje que sirven para facilitar al oyente la comprensión; por ejemplo, el poner de relieve una parte de la oración por medio de la entonación o del orden de las palabras. Piénsese en palabras como «todavía» o «ya». Con la oración «Alfredo no ha llegado todavía» se dice efectivamente «Alfredo no ha llegado» y además se sugiere, pero solamente se sugiere, que se espera su llegada. No puede decirse que el sentido de la oración sea falso porque no se espere la llegada de Alfredo. La palabra «pero» se

diferencia de «y» en que con ella se sugiere que lo que sigue está en oposición con aquello que, de acuerdo con lo precedente, era de esperar. Tales insinuaciones del habla no dan lugar a ninguna diferencia en el pensamiento. Puede transformarse una oración al pasar el verbo de activa a pasiva y al convertir al mismo tiempo el complemento directo en sujeto. De igual modo se puede transformar el complemento indirecto en sujeto, reemplazando al mismo tiempo «dar» por «recibir». Ciertamente tales transformaciones no son irrelevantes en todos los aspectos, pero no afectan al pensamiento, a lo que es verdadero o falso. Si se supusiera que, en general, tales transformaciones son inadmisibles, entonces se impediría con ello cualquier investigación lógica profunda. Es tan importante prescindir de distinciones que no afectan al núcleo del asunto, como hacer las distinciones que conciernen a lo esencial. Pero lo que es esencial depende de la finalidad. Para quien dirige su atención hacia la belleza del lenguaje puede parecerle importante aquello que es irrelevante para el lógico.

Con frecuencia el contenido de una oración va más allá del pensamiento expresado en ella. Pero también ocurre a menudo lo contrario, a saber: que el mero texto que puede ser retenido por la escritura o el fonógrafo no sea suficiente para la expresión del pensamiento. El tiempo presente se usa de dos maneras: en primer lugar, para indicar tiempo; en segundo lugar, para eliminar cualquier restricción temporal, en el caso en que la atemporalidad o la eternidad sean parte del pensamiento, Piénsese, por ejemplo, en las leyes de la matemática. No viene expresado de cuál de los dos casos se trata, sino que se debe adivinar. Cuando con el presente pretende darse una indicación temporal, debe saberse, a fin de comprender correctamente el pensamiento, cuándo fue emitida la oración. Por consiguiente, el tiempo de emisión es también parte de la expresión del pensamiento. Si alguien quiere decir hoy lo mismo que ha expresado ayer usando la palabra «hoy», reemplazará esta palabra por «ayer». Aunque el pensamiento es el mismo, su expresión verbal tiene que ser diferente a fin de compensar el cambio de sentido que se produciría en virtud de los diferentes tiempos de emisión. Lo mismo sucede con palabras como «aquí», «allá». En to-

dos estos casos el texto puro y simple, tal como puede ser fijado por escrito, no es la expresión completa del pensamiento, sino que para su comprensión correcta se necesita el conocimiento de determinadas circunstancias que acompañan a la emisión y que se utilizan como medio de expresar el pensamiento. Pueden pertenecer también a este tipo de cosas el señalar con el dedo, los ademanes, las miradas. El mismo texto que contenga la palabra «yo» expresará, en boca de personas diferentes, diferentes pensamientos, algunos de los cuales pueden ser verdaderos, otros falsos.

65 La ocurrencia de la palabra «yo» en una oración da pie a algunas cuestiones adicionales.

Considérese el caso siguiente. El Dr. Gustav Lauben dice: «Yo he sido herido». Leo Peter lo oye y, después de algunos días, cuenta: «El Dr. Gustav Lauben ha sido herido». Ahora bien, ¿expresa esta oración el mismo pensamiento que la que había emitido el propio Dr. Lauben? Supongamos ahora que Rudolf Lingens haya estado presente cuando el Dr. Lauben habló y oye ahora lo que cuenta Leo Peter. Si el Dr. Lauben y Leo Peter han expresado el mismo pensamiento, entonces Rudolf Lingens, que domina completamente la lengua en la que hablan ambos y recuerda lo que el Dr. Lauben ha dicho en su presencia, tiene que saber inmediatamente, por la narración de Leo Peter, que se está hablando de lo mismo. Pero el conocimiento de la lengua que ambos hablan es cosa aparte cuando se trata de nombres propios. Puede ser fácil que solamente pocas personas relacionen la oración «El Dr. Lauben ha sido herido», con un determinado pensamiento. Para una comprensión completa se necesita, en este caso, el conocimiento de la expresión «el Dr. Gustav Lauben». Ahora bien, si tanto Leo Peter como Rudolf Lingens entienden por «el Dr. Gustav Lauben» el único médico que vive en la casa que ambos conocen, entonces ambos entienden la oración «El Dr. Gustav Lauben ha sido herido» de la misma manera, asocian con ella el mismo pensamiento. Pero también es posible que Rudolf Lingens no conozca personalmente al Dr. Lauben y que no sepa que fue justamente el Dr. Lauben el que hace poco tiempo dijo: «Yo he sido herido». En este caso Rudolf Lingens no puede saber que se trata del mismo asunto. Por tanto, en este caso digo: el pen-

samiento que Leo Peter manifiesta no es el mismo que ha expresado el Dr. Lauben.

Supóngase además que Herbert Garner sabe que el Dr. Gustav Lauben nació el 13 de septiembre de 1875 en N.N. y que esto no se aplica a nadie más; sin embargo, él no sabe donde vive ahora el Dr. Lauben, ni ninguna otra cosa más sobre él. Por otra parte, Leo Peter no sabe que el Dr. Gustav Lauben nació el 13 de septiembre de 1875 en N.N. Entonces, por lo que concierne al nombre propio «Dr. Gustav Lauben», Herbert Garner y Leo Peter no hablan el mismo lenguaje, aunque designen a la misma persona con ese nombre, puesto que no saben que lo están haciendo.

Así pues, Herbert Garner no asocia con la oración «El Dr. Gustav Lauben ha sido herido» el mismo pensamiento que Leo Peter quiere expresar mediante ella. Para obviar el inconveniente de que Herbert Garner y Leo Peter no hablan el mismo lenguaje, supongo que Leo Peter usa el nombre propio «Dr. Lauben», mientras que Herbert Garner usa el nombre propio «Gustav Lauben». Entonces, es posible que Herbert Garner tome por verdadero el sentido de la oración: «El Dr. Lauben ha sido herido», mientras que él mismo, inducido a error por noticias falsas, toma por falso el sentido de la oración «Gustav Lauben ha sido herido». Entonces, bajo las suposiciones que se han hecho, esos pensamientos son distintos.

Según esto, en un nombre propio importa cómo se da a través de él el, la o lo designado. Esto puede suceder de dife-
66 rentes maneras y a cada una de / tales maneras le corresponde un sentido particular de una oración que contiene el nombre propio. Los diferentes pensamientos que resultan de las mismas oraciones coinciden, por cierto, en sus valores de verdad, esto es: si uno de ellos es verdadero, entonces todos son verdaderos, y, si uno de ellos es falso, entonces todos son falsos. Sin embargo, ha de admitirse su diversidad. Así pues, tiene que estipularse que con cada nombre propio está vinculada una sola manera de darse el, la o lo designado mediante él. El que esta estipulación se cumpla es a menudo, pero no siempre, irrelevante.

Ahora bien, cada uno está dado a sí mismo de una manera particular y originaria en la que no está dado a ningún

otro. Así, cuando el Dr. Lauben piensa que él ha sido herido lo está haciendo probablemente tomando como base esa manera originaria en la que él se da a sí mismo. Y solamente el propio Dr. Lauben puede captar los pensamientos así determinados. Pero ahora quiere comunicarse con los demás. No puede comunicar un pensamiento que sólo él puede captar. Por consiguiente, si él dice ahora «Yo he sido herido», tiene que usar el «yo» en un sentido que pueda ser captado por los demás, más o menos en el sentido de: «Aquel que en este momento les habla», con lo cual se sirve de las circunstancias que acompañan a su emisión para la expresión del pensamiento[4].

Hay aquí, sin embargo, algún escrúpulo. ¿Es, entonces, el mismo pensamiento el que expresa primero aquella persona y ahora ésta?

La persona que aún no ha entrado en contacto con la filosofía conoce ante todo cosas que puede ver, tocar, en suma, que puede percibir por los sentidos, como árboles, piedras y casas y está convencida de que cualquier otra persona puede ver y tocar el mismo árbol y la misma piedra que ella ve y toca. Es evidente que a esas cosas no les pertenece un pensamiento. Ahora bien, a pesar de todo, ¿puede esa persona presentarse a las demás como ella misma, tal como se presenta un árbol?

Incluso una persona sin preparación filosófica se ve obligada enseguida a admitir un mundo interior distinto del mundo exterior, un mundo de impresiones sensoriales, de creaciones de su imaginación, un mundo de sensaciones, de sentimientos, de estados de ánimo; un mundo de inclinaciones, deseos, decisiones. A fin de tener una expresión breve

---

[4] No estoy aquí en la afortunada situación de un mineralogista que muestra a su auditorio un cristal de roca. No puedo poner un pensamiento en las manos de mis lectores con el ruego de que lo observen con atención desde todos los ángulos. Tengo que conformarme con ofrecer al lector el pensamiento, en sí imperceptible, envuelto en la forma lingüística perceptible. El aspecto figurativo del lenguaje presenta dificultades. Lo perceptibe irrumpe constantemente y hace a la expresión figurativa y, por tanto, inapropiada. Así se origina una lucha con el lenguaje, y me veo obligado a ocuparme del lenguaje aunque esa no es aquí mi tarea propia. Ojalá haya logrado hacer claro a mis lectores lo que llamo pensamiento.

resumiré esto, haciendo excepción de las decisiones, con la palabra «representación».

Ahora bien, ¿pertenecen los pensamientos a un mundo interior? ¿Son representaciones? Evidentemente no son decisiones.

67 ¿En qué se diferencian las representaciones de las cosas del mundo exterior? En primer lugar:

Las representaciones no pueden ser vistas, ni tocadas, ni olidas, ni gustadas, ni oídas.

Doy un paseo con un compañero. Veo una pradera verde; tengo entonces la impresión visual de verde. La tengo, pero no la veo.

En segundo lugar, las representaciones se tienen. Se tienen sensaciones, sentimientos, estados de ánimo, inclinaciones, deseos. Una representación que alguien tiene pertenece al contenido de su conciencia.

La pradera y las ranas que hay en ella, el Sol que las ilumina, están ahí, lo mismo si los miro que si no; pero la impresión sensorial de verde que tengo existe sólo a través de mi, yo soy su portador. Nos parece disparatado que un dolor, un estado de ánimo, un deseo vaguen por el mundo independientemente, sin un portador. Una sensación no es posible sin alguien que la sienta. El mundo interior presupone a alguien del cual es mundo interior.

En tercer lugar, las representaciones necesitan un portador.

Las cosas del mundo exterior son independientes en comparación con aquéllas.

Mi compañero y yo estamos convencidos de que los dos vemos la misma pradera; pero cada uno de nosotros tiene una impresión sensorial particular de verde. Diviso una fresa entre las hojas verdes del fresal. Mi compañero no la aprecia; es daltónico. La impresión de color que recibe de la fresa no se distingue notablemente de la que recibe de las

hojas. Ahora bien, ¿ve mi compañero la hoja verde de color rojo, o ve la fresa roja de color verde? ¿O ve ambas de un color que yo no conozco en absoluto? Son éstas preguntas que no es posible responder; son, en realidad, preguntas que carecen de sentido. Puesto que si la palabra «rojo» no indica ninguna propiedad de las cosas, sino que caracteriza impresiones sensoriales que pertenecen a mi conciencia, entonces solamente es aplicable dentro de la región de mi conciencia, pues es imposible comparar mi impresión sensorial con la de otro cualquiera. Para ello habría de exigirse que se uniera en una sola conciencia una impresión sensorial que perteneciese a una conciencia y una impresión sensorial que perteneciese a una conciencia distinta. Ahora bien, aun si fuera posible hacer desaparecer una representación de una conciencia y al mismo tiempo hacer surgir una representación en una conciencia distinta, con todo, quedaría sin responder la pregunta de si se trataba de la misma representación. El ser contenido de mi conciencia pertenece de tal manera a la esencia de cada una de mis representaciones que toda representación de algún otro, justamente en tanto que tal, es diferente de las mías. Pero ¿no sería posible que mis representaciones, el contenido total de mi conciencia, fuesen al mismo tiempo contenido de una conciencia más amplia, de una conciencia algo así como divina? Por cierto que sí, pero solamente si yo mismo fuera parte de la esencia divina. Pero, entonces, ¿serían efectivamente mis representaciones? ¿Sería yo su portador? Bien, esto supera de tal modo los límites del conocimiento humano que nos está permitido dejar esa posibilidad fuera de consideración. En cualquier caso, a nosotros, hombres, nos resulta imposible comparar las representaciones de otro con las nuestras propias. Cojo la fresa, la
68 sostengo / entre los dedos. Ahora mi compañero la ve también, la misma fresa; pero cada uno de nosotros tiene su propia representación. Nadie más tiene mi representación, pero muchos otros pueden ver la misma cosa. Ninguna otra persona tiene mi dolor. Alguien puede tener compasión de mí, pero, con todo, mi dolor me sigue perteneciendo a mí y su compasión a él. Él no tiene mi dolor y yo no tengo su compasión.

En cuarto lugar, toda representación tiene solamente un portador: no hay dos personas que tengan la misma representación.

En caso contrario existiría independientemente de éste e independientemente de aquél. ¿Es aquel tilo representación mía? Al usar en esta pregunta la expresión «aquel tilo», estoy, de hecho, anticipando la respuesta; puesto que con esa expresión quiero designar algo que yo veo y que las demás personas pueden también contemplar y tocar. Hay ahora dos posibilidades. Si mi intención se realiza, si designo algo mediante la expresión «aquel tilo», entonces obviamente ha de negarse el pensamiento expresado en la oración «Aquel tilo es representación mía». Pero si mi intención falla, si sólo me parece que veo sin ver realmente, si, según esto, la designación «aquel tilo» es vacía, entonces me he extraviado sin saberlo y sin quererlo en la región de la ficción. Entonces ni el contenido de la oración «Aquel tilo es representación mía» ni el contenido de la oración «Aquel tilo no es representación mía» son verdaderos, pues en ambos casos tengo un enunciado que carece de objeto. De este modo se rehúsa responder a la pregunta sobre la base de que el contenido de la oración «Aquel tilo es representación mía» pertenece al ámbito de la ficción. Desde luego, es cierto que tengo una representación, pero no me refiero a ella con las palabras «aquel tilo». Ahora bien, alguien podría querer designar alguna de sus representaciones con las palabras «aquel tilo»; entonces él sería el portador de aquello que quiso designar con esas palabras; pero entonces no vería ese tilo y ninguna otra persona lo vería ni sería su portador.

Vuelvo ahora a la pregunta: ¿es el pensamiento una representación? Si el pensamiento que expreso en el teorema de Pitágoras puede ser aceptado como verdadero tanto por otras personas como por mí, entonces no pertenece al contenido de mi conciencia, yo no soy su portador y, a pesar de todo, puedo aceptarlo como verdadero. Pero, si de ningún modo es el mismo pensamiento el que yo o cualquier otro consideramos como el contenido del teorema de Pitágoras, entonces no debería decirse en rigor «el teorema de Pitágoras», sino «mi teorema de Pitágoras», «su teorema de Pitá-

goras», y éstos serian distintos, puesto que el sentido pertenece necesariamente a la oración. De este modo mi pensamiento puede ser contenido de mi conciencia, su pensamiento contenido de su conciencia. ¿Podría entonces ser verdadero el sentido de mi teorema de Pitágoras y el suyo falso? He dicho que la palabra «rojo» era aplicable solamente en la región de mi conciencia, si es que no indica una propiedad de las cosas, sino que caracteriza alguna de mis impresiones sensoriales. Así, las palabras «verdadero» y «falso», tal como yo las entiendo, podrían ser solamente aplica-
69 bles en la región de mi conciencia si no / concerniesen a algo de lo que yo no soy portador, sino que estuvieran destinadas a caracterizar, de alguna manera, contenidos de mi conciencia. Entonces la verdad estaría confinada al contenido de mi conciencia, y continuaría siendo dudoso el que algo semejante ocurriese en la conciencia de otro.

Si todo pensamiento exige un portador a cuyo contenido de conciencia pertenece, entonces es solamente pensamiento de ese portador y no hay una ciencia que sea común a muchos, en la que muchos puedan trabajar; por el contrario, yo tengo quizás mi ciencia, a saber: una totalidad de pensamientos de la que soy portador, otro tiene su ciencia. Cada uno de nosotros se ocupa de los contenidos de su conciencia. No sería posible entonces una contradicción entre ambas ciencias y, en realidad, resultaría ocioso discutir sobre la verdad, tan ocioso, ciertamente casi tan ridículo, como que dos personas discutiesen sobre si un billete de cien marcos era auténtico, haciendo referencia ambas al que cada una tiene en su bolsillo y entendiendo cada una de ellas la palabra «auténtico» en su sentido particular. Si alguien toma los pensamientos por representaciones, entonces lo que acepta como verdadero es, según su propia opinión, contenido de su conciencia y, en realidad, es algo que no concierne en absoluto a los demás. Y, si oyese de mí la opinión de que los pensamientos no eran representaciones, no podría ponerla en cuestión, puesto que ahora tampoco esto le atañería.

Así pues, el resultado parece ser éste: los pensamientos no son ni cosas del mundo exterior ni representaciones.

Debe admitirse un tercer reino. Lo que pertenece a él coincide con las representaciones en que no puede ser perci-

bido por los sentidos, pero con las cosas en que no necesita portador a cuyos contenidos de conciencia pertenezca. Así, por ejemplo, el pensamiento que expresamos en el teorema de Pitágoras es atemporalmente verdadero, verdadero independientemente de que alguien lo tome por verdadero. No necesita portador. No es verdadero solamente desde que fue descubierto; al igual que un planeta, ya antes de que alguien lo hubiese visto estaba en interacción con otros planetas[5].

Pero creo oír una extraña objeción. He admitido repetidas veces que la misma cosa que yo veo puede ser también contemplada por otros. Pero ¿qué sucedería si todo fuese solamente un sueño? Si yo solamente soñara mi paseo en compañía de otra persona, si yo solamente soñara que mi compañero vio, como yo, la verde pradera, si todo esto solamente fuese una obra de teatro representada en el escenario de mi conciencia; entonces sería dudoso que hubiera en absoluto cosas del mundo exterior. Quizás el reino de las cosas es vacío y yo no veo cosa ni persona alguna, sino que quizás sólo tengo representaciones de las que yo mismo soy portador. Una representación, que es algo que no puede existir independientemente de mí, como tampoco lo puede hacer mi sentimiento de fatiga, no puede ser una persona, no puede
70 / contemplar juntamente conmigo la misma pradera, no puede ver la fresa que yo sostengo. Es de todo punto increíble el que yo tenga solamente mi mundo interior en lugar de todo el entorno en el que supongo que me muevo y que actúo. Y, sin embargo, esto es la consecuencia inevitable de la tesis de que sólo lo que es representación mía puede ser objeto de mi contemplación. ¿Qué se seguiría de esta tesis si fuese verdadera? ¿Habría otras personas? En efecto, esto sería posible, pero yo no sabría nada de ellas, pues una persona no puede ser representación mía, y, por consiguiente, si nuestra tesis fuese verdadera, tampoco puede ser objeto de mi contemplación. Y con esto pierden pie todas las consideraciones en las que supuse que algo podría ser un objeto para otro tanto

[5] Se ve una cosa, se tiene una representación, se capta o se piensa un pensamiento. Cuando se capta o se piensa un pensamiento no se lo crea, sino que se entra en una determinada relación con algo, que ya existía antes; una relación que es distinta de la de ver una cosa o de la de tener una representación.

como para mí, puesto que, incluso si esto llega a suceder, yo no sabría nada de ello. Me sería imposible distinguir aquello de lo que soy portador de aquello de lo que no soy portador. En tanto que juzgaba que algo no era representación mía, lo convertía en objeto de mi pensar y, con ello, en representación mía. ¿Hay, según esta interpretación, una pradera verde? Quizás, pero no podría verla. Es decir, si la pradera no es una representación mía, no puede ser, según nuestra tesis, objeto de mi contemplación. Pero, si es representación mía, entonces es invisible, puesto que las representaciones no son visibles. Ciertamente puedo tener la representación de una pradera verde, pero entonces no es verde, puesto que no hay representaciones verdes. ¿Hay, según este punto de vista, un proyectil que pese 100 kg? Quizás, pero yo no podría saber nada de él. Si un proyectil no es representación mía, entonces, según nuestra tesis, no puede ser objeto de mi contemplación, de mi pensar. Si un proyectil fuese representación mía, entonces no tendría peso alguno. Puedo tener la representación de un proyectil pesado. Ésta contendría, como parte de la representación, la representación de peso. Pero esta parte de la representación no es una propiedad de la representación total, del mismo modo que Alemania no es una propiedad de Europa. Así, el resultado es: o es falsa la tesis de que sólo lo que es representación mía puede ser objeto de mi contemplación, o todo mi saber y conocer se restringen al ámbito de mis representaciones, al escenario de mi conciencia. En este caso, yo sólo tendría un mundo interior y no sabría nada de las demás personas.

Resulta asombroso cómo los opuestos se trastocan en el curso de tales consideraciones. Tomemos, por ejemplo, un fisiólogo de los sentidos. Como conviene a un investigador de la naturaleza *more* científico, está muy lejos de tener por representaciones suyas las cosas que está convencido de ver y tocar. Por el contrario, cree tener en las impresiones sensoriales los testimonios más seguros de las cosas, las cuales existen de manera completamente independiente de su sentir, representar, pensar, y no tienen necesidad de su conciencia. En tan escasa medida reconoce que las fibras nerviosas y las células ganglionares son contenido de su conciencia, que más bien se inclina a considerar que su conciencia de-

pende de las fibras nerviosas y de las células ganglionares. Constata que los rayos de luz, al refractarse en el ojo, impactan en las terminaciones nerviosas y provocan una modificación, un estímulo. Algo de esto se transmite a las células ganglionares a través de las fibras nerviosas. A esto se unen
71 tal vez procesos adicionales del sistema nervioso y se / originan sensaciones de color, y éstas se combinan, a su vez, para dar lugar quizás a lo que llamamos representación de un árbol. Entre el árbol y mi representación se interponen procesos físicos, químicos y fisiológicos. Pero con mi conciencia solamente están relacionados de manera inmediata, a lo que parece, procesos de mi sistema nervioso, y todo observador del árbol tiene sus procesos particulares en su particular sistema nervioso. Ahora bien, los rayos de luz pueden haber sido reflejados en un espejo antes de entrar en mi ojo, y haber sido proyectados a continuación como si procediesen de lugares situados detrás del espejo. Los efectos sobre los nervios ópticos y todo lo que sigue tendrán lugar exactamente igual que tendrían lugar si los rayos de luz procedieran de un árbol situado detrás del espejo y se hubieran propagado sin interferencias hasta el ojo. Y así, finalmente, se producirá una representación de un árbol aun cuando no haya en absoluto tal árbol. La difracción de la luz puede también, con la intervención del ojo y del sistema nervioso, dar lugar a una representación a la que no corresponde absolutamente nada. Pero para que se produzca la estimulación del nervio óptico ni siquiera se precisa la luz. Cuando cerca de nosotros cae un rayo, creemos ver llamas, aunque no podamos ver el rayo mismo. En este caso el nervio óptico es estimulado eventualmente por corrientes eléctricas que se originan en nuestro cuerpo como consecuencia del rayo. Si el nervio óptico es estimulado mediante esto de la misma manera que sería estimulado por rayos que procediesen de llamas, entonces creemos ver llamas. Así pues, esto depende justamente de la estimulación de los nervios ópticos; el cómo ésta se produzca es irrelevante.

Puede darse todavía un paso más. En realidad esa estimulación de los nervios ópticos no se da inmediatamente, sino que se trata sólo de una suposición. Creemos que una cosa independiente de nosotros estimula un nervio y provo-

ca, mediante ello, una impresión sensorial; pero, en rigor, nosotros solamente experimentamos el final del proceso que penetra en nuestra conciencia. Esa impresión sensorial, esa sensación que atribuimos a una estimulación nerviosa, ¿no podría tener otras causas, del mismo modo que la misma estimulación nerviosa puede producirse de diversas maneras? Si llamamos representación a lo que ocurre en nuestra conciencia, entonces lo que nosotros experimentamos de hecho son representaciones, no sus causas. Y, si el científico quiere evitar toda mera suposición, entonces sólo le quedan las representaciones: todo se disuelve en representaciones, incluso los rayos de luz, las fibras nerviosas y las células ganglionares de las que él había partido. Así, al final, él mismo socava los cimientos de su propia construcción. ¿Todo es representación? ¿Necesita todo un portador sin el cual no posee existencia alguna? Me he considerado a mí mismo como el portador de mis representaciones, pero ¿no soy yo mismo una representación? Es como si estuviera tendido en un sofá, como si viera las puntas de un par de botas lustradas, la parte de arriba de unos pantalones, un chaleco, botones, parte de una chaqueta, en especial las mangas, dos manos, algunos pelos de barba, el perfil borroso de una nariz. Y esa completa reunión de impresiones visuales, ese conglomerado de representaciones, ¿es lo que soy yo mismo?

También me parece ver allí una silla. Es una representa-
72 ción. En realidad no soy demasiado diferente de ella, / pues ¿acaso no soy yo mismo una reunión de impresiones sensoriales, una representación? Pero ¿dónde está entonces el portador de esas representaciones? ¿Cómo he llegado a escoger una de esas representaciones y a colocarla como portadora de las demás? ¿Por qué tiene que ser ésta la representación que yo he tenido a bien llamar *yo*? ¿No podría también elegir para esto aquella representación que me siento tentado a llamar silla? ¿Por qué, en suma, un portador de las representaciones? Un portador sería siempre algo esencialmente diferente de las representaciones de las que es mero portador, algo independiente que no necesitaría ningún portador extraño a él. Si todo es representación, entonces no hay ningún portador de las representaciones. Y, así, asistimos ahora de nuevo a un vuelco en los contrarios. Si no hay

ningún portador de las representaciones, entonces tampoco hay representación alguna, puesto que las representaciones necesitan un portador sin el cual no pueden existir. Si no hay soberano, entonces tampoco hay súbditos. La independencia que me había visto inducido a conceder a la sensación en relación con el que la siente queda suprimida cuando ya no hay ningún portador. Lo que llamaba representaciones son objetos independientes. Carezco de todo fundamento para conceder un lugar especial a aquel objeto que llamé *yo*.

Pero ¿es esto posible? ¿Puede darse una vivencia sin alguien que la tenga? ¿Qué sería todo este espectáculo sin un espectador? ¿Puede darse un dolor sin alguien que lo tenga? El ser sentido es algo que pertenece, necesariamente, al dolor, y al ser sentido pertenece a su vez alguien que lo sienta. Pero entonces hay algo que no es representación mía y que, sin embargo, puede ser objeto de mi contemplación, de mi pensar, y yo soy algo de ese género. ¿O puedo ser yo parte del contenido de mi conciencia, mientras que otra parte es quizás una representación de la Luna? ¿Sucede esto quizás cuando juzgo que contemplo la Luna? Entonces esa primera parte tendría una conciencia, y una parte del contenido de esa conciencia sería nuevamente yo. Y así sucesivamente. Resulta de hecho impensable el que yo esté dentro de mi, como una muñeca rusa, *ad infinitum*, pues entonces no habría solamente un yo, sino infinitamente muchos. Yo no soy mi propia representación y, cuando asevero algo sobre mí —por ejemplo, que no siento en este momento ningún dolor—, entonces mi juicio concierne a algo que no es contenido de mi conciencia, que no es representación mía, a saber: yo mismo. Así pues, aquello de lo cual enuncio algo, no es necesariamente representación mía. Pero quizás se objete esto: si pienso que en este momento no tengo ningún dolor, entonces ¿no corresponde a la palabra «yo» algo del contenido de mi conciencia? ¿Y no es esto una representación? Puede ser. Una determinada representación de mi conciencia puede estar asociada con la representación de la palabra «yo». Pero entonces se trata de una representación junto a otras representaciones, y yo soy su portador del mismo modo que soy el portador de las demás representaciones. Tengo una representación de mí, pero yo no soy esa repre-

sentación. Ha de distinguirse nítidamente entre lo que es contenido de mi conciencia, lo que es representación mía, y lo que es objeto de mi pensar. Por tanto, la tesis de que sólo lo que pertenece al contenido de mi conciencia puede ser objeto de mi contemplación, de mi pensar, es falsa.

73 Queda ahora el camino libre para que pueda reconocer a otras personas como portadoras independientes de representaciones. Tengo una representación de ellas, pero no la confundo con ellas mismas. Y cuando enuncio algo sobre mi hermano no lo enuncio sobre la idea que tengo de mi hermano.

El enfermo que tiene un dolor, es portador de ese dolor, pero el médico que lo está tratando y que reflexiona sobre las causas de ese dolor no es portador del dolor. No se figura que pueda aliviar el dolor del enfermo anestesiándose a sí mismo. Ciertamente es posible que haya en la conciencia del médico una representación que corresponda al dolor del paciente, pero esto no es el dolor, ni es lo que el médico se esfuerza en mitigar. El médico podría consultar a otro médico. Hay que distinguir entonces: primero, el dolor del que el enfermo es portador; segundo, la representación que el primer médico tiene de ese dolor; tercero, la representación que el segundo médico tiene de ese dolor. Esta representación pertenece, por cierto, a la conciencia del segundo médico, pero no es objeto de su reflexión; es quizás un medio para la reflexión, como podría serlo un dibujo. Ambos médicos tienen como objeto común el dolor del enfermo, del que no son portadores. De esto ha de colegirse que no solamente una cosa, sino también una representación, puede ser objeto común del pensar de personas que no tienen esa representación.

Me parece que, de esta manera, el asunto se torna inteligible. Si el hombre no pudiera pensar ni tomar como objeto de su pensar algo de lo que no es portador, tendría ciertamente un mundo interior, mas no un entorno. Pero ¿no puede esto basarse en un error? Yo estoy convencido de que la representación que asocio con las palabras «mi hermano» corresponde a algo que no es representación mía y sobre lo cual puedo enunciar algo. Pero ¿no puedo estar equivocado en este punto? Tales errores ocurren. Vamos a parar entonces, en contra de nuestra intención, al mundo de ficción. ¡En

efecto! Mediante el paso con el cual conquisto un entorno me expongo al peligro del error. Y aquí me doy cuenta de una diferencia adicional entre mi mundo interior y mi mundo exterior. No puedo dudar de que tengo una impresión visual de verde, pero no es tan seguro que vea una hoja de tilo. Así, en el mundo interior, en contra de opiniones ampliamente difundidas, encontramos seguridad, mientras que en nuestras excursiones al mundo exterior la duda no nos abandona nunca por completo. Pero también aquí la probabilidad es en muchos casos apenas distinguible de la certeza, de modo que podemos arriesgarnos a emitir juicios sobre las cosas del mundo exterior. Y tenemos que arriesgarnos a ello, incluso teniendo en cuenta el peligro del error, si no queremos caer en peligros aún mayores.

Como resultado de las últimas consideraciones establezco lo siguiente: no todo lo que puede ser objeto de mi conocer es una representación. Yo mismo, que soy portador de representaciones, no soy una representación. Nada empece ahora para reconocer a otras personas como portadoras de representaciones igual que yo mismo lo soy. Y, una vez que
74 se ha aceptado la posibilidad, la probabilidad es / muy grande, tan grande que, según mi parecer, ya no se distingue de la certeza. ¿Habría, de lo contrario, ciencia de la historia? ¿No se arruinaría, si no, toda teoría moral, todo derecho? ¿Qué quedaría de la religión? También las ciencias de la naturaleza podrían ser valoradas solamente como ficción, al igual que la astrología y la alquimia. Así pues, las reflexiones que he llevado a cabo bajo la suposición de que hay otros hombres aparte de mí que pueden hacer de lo mismo que yo objeto de su contemplación, de su pensar, mantienen intacta, en lo esencial, su fuerza.

No todo es representación. Entonces puedo reconocer también como independiente de mí el pensamiento que las demás personas pueden captar como yo. Puedo admitir una ciencia en la que muchos podrían estar ocupados en la investigación. No somos portadores de los pensamientos, como somos portadores de nuestras representaciones. No tenemos un pensamiento del mismo modo que tenemos, por así decirlo, una impresión sensorial; pero tampoco vemos un pensamiento como vemos, por así decirlo, una estrella. Por eso

es aconsejable elegir aquí una expresión especial, y como tal se nos brinda la palabra «captar». A la captación[6] de pensamientos tiene que corresponder una capacidad mental particular: el poder de pensar. Al pensar no producimos los pensamientos, sino que los captamos. Pues lo que he llamado pensamientos está en intima relación con la verdad. A lo que acepto como verdadero lo juzgo como verdadero de manera completamente independiente de mi aceptación de su verdad e independientemente también de si pienso en ello. El que un pensamiento sea verdadero no tiene nada que ver con que se lo piense. ¡Hechos!, ¡hechos!, ¡hechos!, exclama el investigador de la naturaleza cuando quiere manifestar la necesidad de un fundamento seguro para la ciencia. ¿Qué es un hecho? Un hecho es un pensamiento que es verdadero. Pero el investigador de la naturaleza no reconocerá seguramente que algo es fundamento seguro de la ciencia si depende de los cambiantes estados de conciencia de los hombres. El trabajo de la ciencia no consiste en un crear, sino en un descubrir pensamientos verdaderos. El astrónomo puede aplicar una verdad matemática al investigar sucesos acaecidos con mucha anterioridad y que tuvieron lugar cuando, al menos en la tierra, nadie había aceptado aún esa verdad. Y puede porque el ser verdadero de un pensamiento es atemporal. Por tanto, esa verdad no se pudo haber originado solamente con su descubrimiento.

No todo es representación. En ese caso la psicología contendría en sí todas las ciencias o, cuando menos, sería el supremo juez de todas las ciencias, dominaría incluso sobre la lógica y la matemática. Pero nada significaría comprender peor la matemática que subordinarla a la psicología. Ni la lógica ni la matemática tienen como tarea investigar las mentes y el contenido de la conciencia del que el hombre individual es portador. Más bien se podría quizás establecer como su tarea la investigación del espíritu, del espíritu, no de los espíritus.

---

[6] La expresión «captar» es tan figurativa como «contenido de conciencia». La esencia del lenguaje no permite nada más. Lo que tengo ante mi mano puede contemplarse ciertamente como contenido de mi mano; pero es contenido de mi mano de una manera completamente distinta y mucho más extraña que lo son huesos, los músculos de los que consta y sus tensiones.

75 La captación del pensamiento presupone alguien / que capta, alguien que piensa. Ése es, pues, el portador del pensar, pero no del pensamiento. Aunque el pensamiento no pertenece al contenido de conciencia del que piensa, sin embargo algo en la conciencia tiene que apuntar hacia el pensamiento. Pero esto no debe ser confundido con el pensamiento mismo. Similarmente, también Algol misma es diferente de la representación que alguien tiene de Algol.

El pensamiento no pertenece ni a mi mundo interior, como representación, ni tampoco al mundo exterior, al mundo de las cosas perceptibles por los sentidos.

Este resultado, por concluyente que pueda parecer de acuerdo con lo que se ha expuesto, no será aceptado quizás sin resistencia. Habrá muchos, pienso, a los que les parecerá imposible obtener información sobre algo que no pertenece a su mundo interior, excepto mediante percepción sensorial. De hecho, la percepción sensorial es frecuentemente considerada como la fuente de conocimiento más segura, si no la única, para todo lo que no pertenece al mundo interior. Pero ¿con qué derecho? Ciertamente, a la percepción sensorial le pertenece necesariamente como componente la impresión sensorial, y ésta es parte del mundo interior. En cualquier caso, dos personas no tienen las mismas impresiones sensoriales, aunque puedan tenerlas similares. Ellas solas no nos revelan el mundo exterior. Quizás hay un ser que tiene solamente impresiones sensoriales sin ver o tocar cosas. El tener impresiones visuales no es todavía ver cosas. ¿Cómo es posible que vea el árbol precisamente allí donde lo veo? Depende, evidentemente, de las impresiones sensoriales que tengo y del género particular de las que se producen por el hecho de que veo con dos ojos. En cada una de las dos retinas surge, físicamente hablando, una imagen particular. Cualquier otra persona ve el árbol en el mismo lugar. Ella tiene también dos imágenes retinianas que difieren de las mías. Tenemos que suponer que esas imágenes retinianas son determinantes para nuestras impresiones. Por consiguiente, no sólo no tenemos las mismas impresiones visuales, sino que difieren marcadamente unas de otras. Y, con todo, nos movemos en el mismo mundo exterior. El tener impresiones visuales es ciertamente necesario para ver co-

sas, pero no es suficiente. Lo que tiene que añadirse no es algo de naturaleza sensorial. Y es eso precisamente lo que nos abre el mundo exterior, pues sin ese algo de naturaleza no sensorial cada uno quedaría encerrado en su mundo interior. Puesto que lo decisivo reside en algo de carácter no sensorial ese algo de carácter no sensorial podría también, incluso sin la concurrencia de impresiones sensoriales, conducirnos fuera del mundo interior y facilitarnos la captación de pensamientos. Aparte de nuestro mundo interior debería distinguirse entre el mundo exterior propio de las cosas sensorialmente perceptibles y el reino de lo que no es perceptible sensorialmente. Para reconocer ambos reinos necesitamos algo de carácter no sensorial; pero para la percepción sensorial de las cosas, necesitamos además impresiones sensoriales, y éstas pertenecen, por cierto, al mundo interior. De este modo, aquello sobre lo que se asienta fundamentalmente la distinción entre el darse de una cosa y un pensamiento es algo que no puede asignarse a ninguno de los dos reinos, sino al mundo interior. Así no puedo encontrar que esta distinción sea tan grande que mediante ella pueda llegar a ser imposible el darse un pensamiento que no pertenezca al mundo interior.

76 Desde luego, un pensamiento no es algo que habitualmente pueda llamarse actual[b]. El mundo de lo actual es un mundo en el que esto actúa sobre aquello, lo cambia y ello mismo experimenta a su vez una reacción en virtud de la cual resulta cambiado. Todo esto sucede en el tiempo. Lo

---

[b] En este párrafo y en los que siguen, Frege trata de explicar cómo los pensamientos, a pesar de no tener existencia ni en el tiempo ni en el espacio, pueden, sin embargo, influir sobre las cosas materiales. Al captar un pensamiento se produce en la persona que lo capta una modificación de su estado mental interno. Esta modificación, junto con su decisión de actuar de tal y tal manera, puede dar lugar a una modificación en el curso de los acontecimientos del mundo material. Es ésta la manera en que los pensamientos adquieren *Wirklichkeit*. Hasta ahora he traducido *wirklich* y *Wirklichkeit* por «real» y «realidad», respectivamente, pero en este contexto ha de traducirse por «actual» y «actualidad», también respectivamente. Sigo en este punto la traducción de P. Geach (y no la de M. Quinton, que conserva *real* y *reality*), que permite, a su vez, traducir *wirken* y *Wirkung* por «actual» y «actuación», palabras estas últimas que están emparentadas con «actual» y «actualidad» en el mismo sentido en que lo están *wirklich* y *Wirklichkeit* con *wirken* y *Wirkung*.

que es atemporal e inmutable difícilmente lo reconocemos como actual. Ahora bien, ¿es el pensamiento mudable o es atemporal? El pensamiento que expresamos en el teorema de Pitágoras es ciertamente atemporal, eterno, inmutable. Pero ¿no hay pensamientos que son verdaderos hoy pero falsos medio año más tarde? El pensamiento, por ejemplo, de que aquel árbol está cubierto de hojas verdes, ¿no es ciertamente falso después de medio año? No, puesto que no es en absoluto el mismo pensamiento. Las palabras «ese árbol está cubierto de hojas verdes» no bastan por sí solas para expresar el pensamiento, puesto que el tiempo de emisión también le pertenece. Sin la determinación temporal que se da mediante él no tenemos ningún pensamiento completo, esto es: no tenemos ningún pensamiento en absoluto. Solamente una oración, con la determinación temporal incluida y completa en todos sus aspectos expresa un pensamiento. Pero ese pensamiento, cuando es verdadero, no lo es sólo hoy o mañana, sino atemporalmente verdadero. De este modo el presente en «es verdadero» no se refiere al presente del que habla, sino que es, si se me permite la expresión, un tiempo de la atemporalidad. Si usamos la mera forma de la oración asertórica evitando la palabra «verdadero», deben distinguirse dos cosas: la expresión del pensamiento y la aserción. La determinación temporal, que eventualmente está contenida en la oración, pertenece solamente a la expresión del pensamiento, mientras que la verdad, cuya aceptación reside en la forma de la oración asertórica, es atemporal. Ciertamente, las mismas palabras pueden, debido a la variabilidad del lenguaje con el tiempo, tomar otro sentido, expresar otro pensamiento; pero entonces el cambio concierne a lo lingüístico.

Pero ¿qué valor podría tener para nosotros lo eternamente inmutable, aquello que no podría experimentar ninguna actuación ni tampoco actuar sobre nosotros? Algo que fuese, completamente y en cualquier aspecto, inactivo sería también completamente no actual y no tendría existencia para nosotros. Incluso lo atemporal debe estar ligado de alguna manera con la temporalidad, si es que ha de ser algo para nosotros. ¿Qué sería para mí un pensamiento que jamás fuese captado por mí? Pero al captar un pensamiento entro en rela-

ción con él y él conmigo. Es posible que el mismo pensamiento que hoy es pensado por mí no haya sido pensado por mí ayer. Con esto queda abolida efectivamente la estricta atemporalidad del pensamiento. Pero podemos estar inclinados a distinguir entre propiedades esenciales e inesenciales y a reconocer algo como atemporal si los cambios que experimenta atañen solamente a sus propiedades inesenciales. Una propiedad de un pensamiento se llamará inesencial si consiste en, o se sigue de, el hecho de que ese pensamiento sea captado por alguien que piensa.

¿Cómo actúa un pensamiento? Siendo captado y tenido por verdadero. Es un proceso del mundo interior del que piensa que puede tener consecuencias posteriores en ese mundo interior, las cuales, al extenderse a la región de la voluntad, se hacen sentir también en el mundo exterior. Si, por ejemplo, capto el pensamiento que expreso en el teorema de
77 Pitágoras, la consecuencia puede ser que lo / acepte como verdadero y, además, que lo aplique al tomar una decisión que dé lugar a una aceleración de masas. Es así como nuestras acciones vienen usualmente preparadas por el pensar y el juzgar. Y es así como los pensamientos pueden tener una influencia mediata sobre los movimientos de masas. El actuar de un hombre sobre otro hombre viene facilitado en la mayoría de los casos por los pensamientos. Se comunica un pensamiento. ¿Cómo ocurre esto? Se producen cambios en el mundo exterior común que, al ser percibidos por los demás, les brindan la ocasión de captar un pensamiento y de tomarlo como verdadero. Los grandes acontecimientos de la historia universal ¿podrían haberse realizado de otro modo que por la comunicación de pensamientos? Y, con todo, nos sentimos inclinados a considerar los pensamientos como no actuales, puesto que parecen ser inactivos en los procesos, mientras que el pensar, juzgar, expresar, comprender, todo hacer, en suma, es asunto propio de los hombres. ¡Cuán completamente diferente aparece la actualidad de un martillo comparada con la de un pensamiento! ¡Cuán diferente es el proceso de entregar un martillo al de comunicar un pensamiento! El martillo pasa de estar en poder de uno a estar en poder de otro, es agarrado, experimenta una presión. Con ello, su densidad, la disposición de sus partes, se modifica

localmente. Nada de esto sucede en el caso de un pensamiento. Al ser comunicado, el pensamiento no abandona los dominios del que lo comunica, puesto que, en el fondo, el hombre no tiene ningún poder sobre él. El pensamiento, al ser captado, provoca sólo, en principio, cambios en el mundo interior del que lo capta, pero el núcleo de su esencia permanece intacto, puesto que los cambios que experimenta solamente atañen a las propiedades inesenciales. Falta aquí algo que reconocemos por todas partes en la naturaleza: la acción recíproca. Los pensamientos no son completamente inactuales, pero su actualidad es de un género completamente diferente de la de las cosas. Y su actuar es provocado por una acción del que piensa: sin ella serían inactivos, al menos hasta donde podemos ver. Y, sin embargo, el que piensa no los crea, sino que debe tomarlos como son. Pueden ser verdaderos sin ser captados por alguien que piensa e, incluso así, no son completamente inactuales, al menos si pueden ser captados y, de este modo, puestos en acción.

LA NEGACIÓN: UNA INVESTIGACIÓN LÓGICA*

143 Una pregunta oracional contiene una petición de que se acepte como verdadero un pensamiento o de que se rechace como falso. Para que sea posible dar cumplimiento correcto a esa petición tiene que exigirse que el pensamiento del que se trata sea reconocible sin ninguna duda a partir del texto de la pregunta, y, en segundo lugar, que ese pensamiento no pertenezca al mundo de ficción. En lo que sigue supongo
144 siempre que esas / condiciones se cumplen. La respuesta a una pregunta[1] es una aserción basada en un juicio, tanto si la pregunta es contestada afirmativamente como si lo es negativamente.

Surge aquí, sin embargo, una dificultad. Si el ser de un pensamiento es su ser verdad, entonces la expresión «pensamiento falso» es tan autocontradictoria como la expresión «pensamiento que no es»; de este modo, la expresión «el pensamiento de que tres es mayor que cinco» es vacía y, por consiguiente, no puede usarse en absoluto en la ciencia, excepto entrecomillada. Así, no puede decirse «que tres es mayor que cinco es falso», puesto que el sujeto gramatical es vacío.

Pero ¿no se puede preguntar al menos si algo es verdadero? En una pregunta puede distinguirse entre la petición de juzgar y el contenido particular de la pregunta sobre el que

* Este trabajo apareció originalmente como «Die Verneinung. Eine logische Untersuchung» y fue publicado en *Beiträge zur Philosophie des deutschen Idealismus*, 1, 1919, pp. 143-157. Estaba concebido como segunda parte de las *Investigaciones lógicas*. Está dedicado a discutir, una vez sentada la objetividad de los pensamientos, los problemas que presumiblemente plantea la existencia de pensamientos falsos.

[1] Aquí, y en lo que sigue, cuando escribo solamente «pregunta» me refiero siempre a pregunta oracional.

ha de dictaminarse. En lo que sigue llamaré a este contenido particular simplemente el contenido de la pregunta, o el sentido de la correspondiente oración interrogativa. Ahora bien, ¿tiene la oración interrogativa

«¿Es 3 mayor que 5?»

un sentido, si el ser de un pensamiento consiste en su ser verdad? Si esto es así, entonces la pregunta no puede tener como contenido un pensamiento, y nos sentimos inclinados a decir que la oración interrogativa no tiene ningún sentido en absoluto. Pero esto bien pudiera venir de que nos damos cuenta en el acto de la falsedad. ¿Tiene ahora la oración interrogativa

«¿Es $(21/20)^{100}$ mayor que $\sqrt[10]{10^{21}}$?»

un sentido? Si se hubiera averiguado que la pregunta tenía que responderse afirmativamente, podría aceptarse que la oración interrogativa tiene un sentido, puesto que tendría como sentido un pensamiento. Pero ¿qué sucedería si la respuesta tuviera que ser respondida negativamente? Según nuestra suposición, no tendría como sentido un pensamiento. Pero la oración interrogativa, si es que, en suma, contiene una pregunta, tiene que tener ciertamente un sentido. De hecho, ¿no se pregunta en ella por algo? ¿No se puede estar deseando obtener una respuesta a ella?

Entonces, depende también de la respuesta el si se acepta como contenido de la pregunta un pensamiento. Ahora bien, el sentido de la oración interrogativa ha de poder ser captado antes de ser respondida, ya que de lo contrario no sería posible en absoluto dar ninguna respuesta. Así pues, lo que es captable como sentido de la oración interrogativa antes de que se la responda —y solamente eso puede llamarse con propiedad sentido de la oración interrogativa— no puede ser un pensamiento, si el ser de un pensamiento consiste en su ser verdad. Pero ¿no es una verdad que el Sol es mayor que la Luna? ¿Y no consiste el ser de una verdad justamente en su ser verdad? ¿No ha de aceptarserse entonces como sentido de la oración interrogativa

«¿Es el Sol mayor que la Luna?»

una verdad, un pensamiento, cuyo contenido consiste en su ser verdad? ¡No! El ser verdad no puede pertenecer al sentido de una oración interrogativa. Esto estaría en contradicción con la esencia de la pregunta. El contenido de la pre-
145 gunta es aquello sobre lo que ha de dictaminarse. / Por tanto, el ser verdad no puede contarse como perteneciente al contenido de la pregunta. Cuando planteo la pregunta de si el Sol es mayor que la Luna, entonces reconozco con ello el sentido de la oración interrogativa

«¿Es el Sol mayor que la Luna?».

Ahora bien, si este sentido fuese un pensamiento cuyo ser consistiese en su verdad, yo aceptaría con ello al mismo tiempo que ese sentido era verdadero. La captación del sentido sería al mismo tiempo un acto de juzgar, y la emisión de la oración interrogativa sería al mismo tiempo una aserción, por lo tanto, la respuesta a la pregunta. Pero en una oración interrogativa no puede aseverarse ni la verdad ni la falsedad de su sentido. Por esto el sentido de una oración interrogativa no puede ser algo cuyo ser consista en su ser verdad. La esencia de la pregunta reclama la separación entre el captar el sentido y el juzgar. Y, puesto que el sentido de una oración interrogativa está siempre incrustado en la oración asertórica en la que se da respuesta a la pregunta, esa separación debe llevarse a cabo también en las oraciones asertóricas. Depende de lo que se entienda por la palabra «pensamiento». En cualquier caso se necesita una designación breve para aquello que puede ser sentido de una oración interrogativa. Llamo a esto pensamiento. De acuerdo con este uso del lenguaje, no todos los pensamientos son verdaderos. El ser de un pensamiento no consiste entonces en su ser verdad. Tenemos que admitir pensamientos en este sentido, porque en el trabajo científico usamos preguntas; pues el investigador tiene que contentarse a veces con plantear una pregunta hasta que pueda responderla. Al plantear la pregunta capta un pensamiento. Entonces puedo decir también: el investigador tiene que contentarse a veces con captar un pensa-

miento. Esto es ya, en todo caso, un paso hacia la meta, aun cuando no haya todavía ningún juicio. Tiene, pues, que haber pensamientos en el sentido que he dado a la palabra. Estos pensamientos, que quizás más tarde resulten falsos, tienen su justificación en la ciencia y no pueden ser tratados como si no consistiesen en nada. Piénsese en una demostración indirecta. Aquí, el conocimiento de la verdad se alcanza justamente mediante la captación de un pensamiento falso. El profesor dice: «Supongamos que *a* no es igual a *b*». Un principiante piensa enseguida: «¡Qué sinsentido! ¡Pero si estoy viendo que *a* es igual a *b*!» Está confundiendo la carencia de sentido por parte de una oración con la falsedad del pensamiento expresado en ella.

Desde luego, a partir de un pensamiento falso no se puede inferir nada; pero el pensamiento falso puede ser parte de un pensamiento verdadero, a partir del cual puede inferirse algo. El pensamiento contenido en la oración

> «Si el acusado estaba en Roma el día de autos, entonces no cometió el asesinato»[2],

puede aceptarse como verdadero por alguien que no sepa si el acusado estaba en Roma el día de autos ni si ha cometido
146 el asesinato. Cuando el / todo se propone como verdadero, ninguna de las dos partes del pensamiento contenidas en el todo, ni el antecedente ni el consecuente, se emite con fuerza asertórica. Tenemos entonces solamente un único acto de juicio, pero tres pensamientos, a saber: el pensamiento total, el antecedente y el consecuente. Si alguna de las partes componentes de la oración careciese de sentido, la totalidad carecería también de sentido. A partir de esto puede reconocerse qué diferencia hay entre una oración que carezca de sentido y una que exprese un pensamiento falso. Ahora bien, para los pensamientos que constan de un antecedente y un consecuente vale la ley de que, *salva veritate*, el opuesto del antecedente puede convertirse en consecuente y el opuesto

[2] Tiene que suponerse aquí que el mero texto no contiene el pensamiento completo, sino que el complemento que dé lugar al pensamiento completo ha de extraerse de las circunstancias en que es emitido.

del consecuente en antecedente. Los ingleses llaman a esta operación *contraposition*. Según esta ley, de la proposición

«Si $(21/20)^{100}$ es mayor que $\sqrt[10]{10^{21}}$, entonces $(21/20)^{1000}$ es mayor que 10^{21}».

puede pasarse a la proposición

«Si $(21/20)^{1000}$ no es mayor que 10^{21}, entonces $(21/20)^{100}$ no es mayor que $\sqrt[10]{10^{21}}$».

Y tales pasos son importantes para las demostraciones indirectas que, de lo contrario, no serían posibles.

Ahora bien, si el antecedente del primero de los pensamientos compuestos, a saber: que $(21/20)^{100}$ es mayor que $\sqrt[10]{10^{21}}$ es verdadero, entonces el consecuente del segundo de los pensamientos compuestos, a saber: que $(21/20)^{100}$ no es mayor que $\sqrt[10]{10^{21}}$, es falso. Según esto, cualquiera que admita la licitud de nuestro paso del *modus ponens* al *modus tollens* tiene también que aceptar que un pensamiento falso es algo; de lo contrario quedarían solamente o el consecuente del *modus ponens* o el antecedente del *modus tollens*; pero también uno de ellos sería suprimido en tanto que no existente.

Puede entenderse también por ser de un pensamiento el hecho de que éste pueda captarse como el mismo pensamiento por diferentes personas que piensan. Entonces el no ser de un pensamiento consistiría en el hecho de que, de diversas personas que piensan, cada una de ellas asociará con la oración su propio sentido, el cual sería, entonces, contenido de su conciencia particular; de este modo no habría un sentido común de la oración que pudiera ser captado por varias personas. Ahora bien, ¿es un pensamiento falso aquel que no tiene ser en este sentido? Entonces, los investigadores que han discutido entre ellos la cuestión de si la tuberculosis del ganado vacuno es transmisible a las personas y se han puesto finalmente de acuerdo en que esa transmisibilidad no existía, estarían en la misma situación de un grupo de personas que hubieran empleado en su conversación la expresión «ese arco iris» y cayeran ahora en la cuenta de que no habían estado designando nada mediante esas palabras,

pues cada uno de ellos había tenido una visión de la que él mismo era portador. Cada investigador se sentiría burlado por una falsa apariencia, puesto que la sola suposición bajo la cual sus acciones y discusiones hubiesen sido razonables resulta que no se ha cumplido; no han dado a la cuestión que traían entre manos un sentido que fuese común a todos ellos.

Tiene que ser posible entonces el plantear una pregunta
147 cuya respuesta, conforme a la verdad, / sea negativa. El contenido de tal pregunta es, según el uso que hago del lenguaje, un pensamiento. Tiene que ser posible que varias personas que oyen la misma oración interrogativa capten el mismo sentido y lo acepten como falso. El tribunal de jurados sería una institución estúpida si no se pudiera aceptar que cada uno de los jurados puede entender la pregunta que se le presenta en el mismo sentido. Por tanto, el sentido de una oración interrogativa es algo que, aun cuando la pregunta haya de responderse negativamente, puede ser captado por varias personas.

¿Qué más se seguiría si el ser verdad de un pensamiento residiera en el hecho de poder ser captado por varias personas como el mismo pensamiento, mientras que una oración que expresase algo falso no presentase un sentido que fuese común a varias personas?

Si un pensamiento es verdadero y está compuesto de pensamientos uno de los cuales es falso, entonces el pensamiento completo podría ser captado como el mismo por varias personas, pero el pensamiento componente, que es falso, no podría serlo. Tal caso podría ocurrir. Así, por ejemplo, se puede aseverar con todo derecho ante un tribunal de jurados: «Si el acusado estaba en Roma el día de autos, entonces no cometió el asesinato», y puede ser falso que el acusado estuviese en Roma el día de autos. Entonces los jurados podrían captar el mismo pensamiento al oír la oración «Si el acusado estaba en Roma el día de autos, entonces no cometió el asesinato», mientras que cada uno de ellos asociaría un sentido peculiar con la oración que hace de antecedente. ¿Es esto posible? ¿Puede una parte componente de un pensamiento, el cual se presenta como el mismo ante todos los jurados, no ser común a todos ellos? Si la totalidad no necesita un portador, ninguna de sus partes necesita un portador.

En consecuencia, un pensamiento falso no es un pensamiento que carezca de ser, incluso aunque por ser se entienda el no tener necesidad de un portador. Un pensamiento falso tiene que admitirse, aunque no como verdadero, sí, algunas veces, como imprescindible: en primer lugar, como sentido de una oración interrogativa; en segundo lugar, como parte componente de una asociación hipotética de pensamientos, y, en tercer lugar, en la negación. Tiene que ser posible negar un pensamiento falso y, para poder hacerlo, se necesita tenerlo. No puedo negar lo que no es. Y lo que necesita de mí como portador, no puedo transformarlo mediante la negación en algo de lo cual no soy portador y que puede ser captado como el mismo pensamiento por varias personas.

Ahora bien, ¿ha de entenderse la negación de un pensamiento como una disolución del pensamiento en sus partes componentes? Los jurados no pueden cambiar en nada, mediante su veredicto negativo, lo que constituye el pensamiento expresado en la pregunta que se les presenta. El pensamiento es verdadero o falso de manera completamente independiente de si ellos dan un veredicto correcto o incorrecto. Y si es falso es, con todo, un pensamiento. Si después de que los jurados pronuncien el veredicto no hay en absoluto ningún pensamiento, sino solamente restos de pensamiento, entonces eso mismo era lo que había antes; bajo la apariencia de una pregunta no se les había presentado ningún pensamiento, sino solamente restos de pensamiento; no tenían absolutamente nada sobre lo que hubiesen podido pronunciar un veredicto.

148 No podemos cambiar, mediante nuestro / juzgar, nada de lo que constituye un pensamiento. Podemos solamente aceptar lo que es. A un pensamiento verdadero no le podemos hacer nada mediante nuestro juzgar. Podemos introducir un «no» en la oración que lo expresa y obtener así una oración que, como se ha expuesto, no contiene ningún no-pensamiento, sino que puede tener completa justificación como antecedente o consecuente de una oración compuesta. El que sea falsa le impide solamente el ser emitida con fuerza asertórica. Ahora bien, aquel primer pensamiento queda intacto a través de este proceso. Permanece verdadero como antes.

¿Podemos hacerle algo a un pensamiento falso mediante nuestra negación? Tampoco, puesto que un pensamiento falso sigue siendo siempre un pensamiento y puede aparecer como parte de un pensamiento verdadero. Introduzcamos un «no» en la oración

«3 es mayor que 5»,

emitida sin fuerza asertórica y cuyo sentido es falso; obtenemos entonces:

«3 no es mayor que 5»,

una oración que puede ser emitida con fuerza asertórica. Nada se deja aquí traslucir de la disolución del pensamiento, de la separación de sus partes.

¿Cómo podría disolverse un pensamiento? ¿Cómo podría romperse la conexión entre sus partes? El mundo de los pensamientos tiene su modelo en el mundo de las oraciones, expresiones, palabras, signos. A la estructura del pensamiento le corresponde la composición de la oración a partir de palabras, con lo cual el orden no es, en general, indiferente. A la disolución, a la destrucción del pensamiento, corresponderá, conforme a esto, una ruptura en las palabras tal como sucede cuando se corta con unas tijeras una oración escrita en un papel, de modo que en cada trozo del papel está la expresión de una parte del pensamiento. Estos trozos pueden entonces ser mezclados a discreción unos con otros, o ser arrebatados por el viento. La conexión se disuelve, la ordenación original no puede ya ser reconocida. ¿Sucede esto cuando negamos un pensamiento? ¡No! El pensamiento sobrevivirá sin duda también a su ejecución *in effigie*. Muy al contrario, lo que se hace es intercalar la palabra «no» en el, por otra parte inalterado, orden de las palabras. El texto original es todavía reconocible; el orden no puede ser alterado a voluntad. ¿Es esto disolución, separación? ¡Al contrario! El resultado es una estructura fuertemente unida.

La consideración de la ley *duplex negatio affirmat* permite reconocer con especial claridad que la negación no tiene ningún efecto separador, disolvente. Parto de la oración

«La Schneekoppe es más alta que el Brocken».

Mediante la introducción de un «no» obtengo:

«La Schneekoppe no es más alta que el Brocken».

Ambas oraciones se emiten sin fuerza asertiva. Una segunda negación daría lugar a algo parecido a la oración

«No es verdadero que la Schneekoppe no es más alta que el Brocken».

Sabemos ya que la primera negación no puede provocar la disolución del pensamiento; pero, a pesar de todo, supongamos por una vez que, después de la primera negación, tu-
149 viésemos solamente / fragmentos de pensamiento. Entonces tendríamos que suponer que la segunda negación podría ensamblar de nuevo esos fragmentos. Así pues, la negación se parecería a una espada que pudiera volver a hacer cicatrizar los miembros que ha cortado. Pero esto requeriría el mayor de los cuidados. Las partes del pensamiento han perdido completamente toda conexión y relación mediante la primera negación. Así, mediante una aplicación poco cuidadosa de la virtud cicatrizadora de la negación, podría obtenerse fácilmente la oración

«El Brocken es más alto que la Schneekoppe».

Ningún no-pensamiento se torna en pensamiento mediante la negación, del mismo modo que, por medio de la negación, ningún pensamiento se torna en no-pensamiento.

Además, una oración que contiene la palabra «no» en el predicado, puede expresar un pensamiento que puede convertirse en el contenido de una pregunta, una pregunta que, como toda pregunta oracional, deja abierta la decisión sobre la respuesta.

Ahora bien, ¿qué objetos son aquellos que, en rigor, pueden ser separados mediante la negación? No son partes componentes de la oración; mucho menos partes del pensamiento. ¿Cosas del mundo exterior? Éstas no se preocupan en ab-

soluto de nuestro negar. ¿Representaciones del mundo interior de la persona que niega? Pero, entonces, ¿cómo sabe el miembro del jurado cuál de sus representaciones, ha de separar según las circunstancias? La pregunta que se le presenta no señala ninguna. Puede provocar en él representaciones. Pero las representaciones que se provocan en los mundos internos de los jurados son distintas. Y entonces cada jurado procedería a su propia separación en su propio mundo interior, y eso no constituiría un veredicto.

No parece, pues, posible indicar qué es lo que realmente se disuelve, se descompone o se separa por medio de la negación.

Con la creencia en el poder disolvente, separador, de la negación, va aparejada aquella según la cual un pensamiento negativo se tiene por menos útil que uno afirmativo. Pero tampoco se le puede tener por completamente inútil. Considérese el razonamiento

> «Si el acusado no estaba en Berlín el día del asesinato, entonces no cometió el asesinato; ahora bien, el acusado no estaba en Berlín el día del asesinato; por tanto, no cometió el asesinato»,

y compáreselo con el razonamiento siguiente:

> «Si el acusado estaba en Roma el día del asesinato, entonces no cometió el asesinato; ahora bien, el acusado estaba en Roma el día del asesinato, por tanto, no cometió el asesinato».

Ambos razonamientos proceden de la misma manera y no hay el más mínimo fundamento objetivo para distinguir entre premisas afirmativas y negativas al expresar la ley de razonamiento que le sirve de base. Se habla de juicios afirmativos y negativos. También Kant lo hace. Traduciendo esto a mi manera de hablar, se distinguiría entre pensamientos afirmativos y negativos. Una distinción innecesaria, al menos para la lógica, cuyo fundamento ha de buscarse fuera de la lógica. No conozco ninguna ley lógica para cuya expresión verbal sea necesario, o / cuando menos ventajoso,
150

utilizar estos términos[3]. En toda ciencia en la que, de modo general, se pueda hablar de regularidad, ha de preguntarse siempre: ¿qué expresiones terminológicas son necesarias, o cuando menos provechosas, para dar expresión exacta a las leyes de esa ciencia? Lo que no pasa esta prueba viene del Maligno[a].

A esto se añade el que no es fácil en absoluto indicar qué es un juicio negativo (pensamiento negativo). Considérense las oraciones: «Cristo es inmortal», «Cristo tiene vida eterna», «Cristo no es inmortal», «Cristo es mortal», «Cristo no tiene vida eterna». ¿Cuál de los pensamientos que tenemos aquí es positivo y cuál es negativo?

Usualmente suponemos que la negación se extiende a todo el pensamiento cuando la palabra «no» se une al predicado del verbo. Pero algunas veces la palabra negativa forma parte, gramaticalmente hablando, del sujeto, como en la oració: «Ningún hombre vive más de cien años». Una negación puede encontrarse en cualquier parte de una oración sin que el pensamiento sea por eso indudablemente negativo. Se ve, pues, a qué truculentas cuestiones puede conducir la expresión: «juicio negativo» (pensamiento negativo). La consecuencia puede ser disputas sin término, conducidas con la mayor de las sutilezas, pero, en lo esencial, infructuosas. De acuerdo con esto, considero acertado el dejar tranquila la distinción entre juicios o pensamientos afirmativos y negativos hasta que tengamos un criterio mediante el cual se pueda distinguir con certeza en cada caso entre un juicio afirmativo y uno negativo. Cuando se tenga tal característica podrá conocerse también qué beneficio puede esperarse de esa distinción. En principio dudo de que esto se logre. No se

---

[3] Por eso tampoco he usado la expresión «pensamiento negativo» en mi ensayo «Der Gedanke» (*Beiträge zur Philosophie des Deutschen Idealismus*, Vol. I, p. 58) [«El pensamiento», pp. 196-225 de este volumen]. La distinción entre pensamientos afirmativos y negativos solamente hubiera enredado el asunto. En ninguna parte hubiera habido la oportunidad de enunciar algo sobre los pensamientos afirmativos excluyendo los negativos, o de enunciar algo sobre los pensamientos negativos excluyendo los afirmativos.

[a] En su traducción inglesa de este artículo, P. Geach sugiere que esta última frase es una alusión a Mateo, 5,37.

podrá entresacar esa característica del lenguaje, puesto que los lenguajes son de poco fiar en cuestiones de lógica. No es, por cierto, una de las tareas menores del lógico el advertir de las trampas que el lenguaje tiende al que piensa.

Después de haber refutado los errores, puede ser provechoso el ir tras las fuentes de las cuales han brotado. Una de las fuentes me parece que es, en este caso, la necesidad de dar definiciones de los conceptos que se quieren emplear. Ciertamente, el esforzarse por hacer lo más claro posible el sentido que se asocia con una expresión es algo de todo punto loable. Sin embargo, no ha de olvidarse que no todo puede definirse. Si se quiere a todo trance definir algo cuya esencia no es definible, se pasa a depender fácilmente de cosas inesenciales y accesorias y, con ello, la investigación se coloca desde el principio en una vía equivocada. Y esto es ciertamente lo que les pasó a muchos que quisieron explicar
151 lo que era un juicio y / fueron a caer en la compositividad[4]. El juicio está compuesto por partes que tienen un determinado orden, una conexión y están interrelacionadas. Pero ¿en qué todo no tenemos esto?

A esto se asocia otro error, a saber: la opinión de que la persona que juzga, establece, por medio de su juzgar, la co-

[4] Acaso se acierte mejor con el uso lingüístico ordinario si se entiende por juicio un acto de juzgar, como un salto es un acto de saltar. Desde luego, con esto queda sin resolver el núcleo de la dificultad; hállase éste en la palabra «juzgar». Juzgar, se podría continuar diciendo, es aceptar algo como verdadero. Lo que se acepta como verdadero solamente puede ser un pensamiento. El núcleo originario parece ahora haberse escindido: una de sus partes se halla en la palabra «pensamiento»; la otra, en la palabra «verdadero». Ciertamente, tenemos que detenernos aquí. Desde el principio se debe estar preparado para aceptar que no se puede seguir definiendo *ad infinitum*.

Si un juicio es un acto, entonces sucede en un tiempo determinado y pertenece después al pasado. A una acción le corresponde también un agente, y no se conoce el acto completamente si no se conoce al agente. No se puede hablar entonces de juicio sintético en el sentido usual. Si se llama juicio sintético al de que por dos puntos pasa solamente una línea recta, entonces no se entiende por «juicio» un acto que ha sido llevado a cabo por una persona determinada en un tiempo determinado, sino algo que es atemporalmente verdadero, incluso si su ser verdad no es aceptado por ninguna persona. Si a tal cosa se la llama una verdad, es quizás mejor decir «verdad sintética» en lugar de «juicio sintético». Si, a pesar de esto, se prefiere la expresión «juicio sintético», entonces tenemos que prescindir del sentido del verbo «juzgar».

nexión, el orden de las partes y, mediante esto, trae el juicio a la existencia. Con ello no se mantienen separados la captación de un pensamiento y la aceptación de su verdad. Desde luego, en muchos casos, aunque no en todos, esos actos se suceden tan inmediatamente que parecen fundirse en un solo acto. Pueden transcurrir años de fatigosas investigaciones entre la captación de un pensamiento y la aceptación de su verdad. En este caso es evidente que mediante ese acto de juzgar no se establece el pensamiento, la conexión de sus partes, puesto que ya existía con anterioridad. Pero el acto de captar un pensamiento tampoco es el crear un pensamiento, el establecer la ordenación de sus partes, pues el pensamiento era ya verdadero, constaba ya de la ordenación de sus partes antes de que fuese captado. Del mismo modo que un excursionista que atraviesa una cordillera no crea con ello la cordillera, así tampoco la persona que juzga crea un pensamiento al aceptarlo como verdadero. Si así lo hiciera, el mismo pensamiento no podría ser aceptado como verdadero ayer por una persona, hoy por otra; ni siquiera podría la misma persona aceptar como verdadero el mismo pensamiento en tiempos diferentes, puesto que tendría que suponer que el ser de ese pensamiento era de carácter intermitente.

Si se tiene por posible el que alguien cree mediante su acto de juzgar aquello que al juzgar acepta como verdadero, en tanto que establece la conexión, el orden de sus partes, entonces está también cerca de atribuirse la capacidad de destruirlo. Así como el destruir se opone al construir, al establecer orden y conexión, así el negar parece enfrentarse al
152 juzgar / y, de esta manera, se llega fácilmente a la suposición de que la ruptura de las conexiones por medio de la negación acontece del mismo modo que tiene lugar la construcción por medio del acto del juicio. Así, el negar y el juzgar aparecen como dos polos opuestos que tienen justamente, en tanto que par, el mismo rango; un par comparable quizás a la oxidación y reducción en química. Pero una vez que se ha visto que mediante el acto de juzgar no se establece ninguna conexión, sino que el orden de los pensamientos existía ya antes del acto de juzgar, todo aparece bajo una nueva luz. Ha de señalarse, una vez más, que la captación de un pensa-

miento no constituye ningún acto de juzgar; que se puede expresar un pensamiento en una oración sin que con ello se asevere como verdadero; que en el predicado de una oración puede estar contenida una palabra negativa y que entonces el sentido de esa palabra es parte integrante del sentido de la oración, es parte integrante del pensamiento; que mediante la inserción de un «no» en el predicado de una oración, que ha de emitirse sin fuerza asertórica, se obtiene una oración que expresa un pensamiento, del mismo modo que lo expresa la oración original. Ahora bien, si se llama negación al paso de un pensamiento a su contrario, entonces este negar no tiene en absoluto el mismo rango que el juzgar, ni tampoco ha de entenderse como el polo contrario al juzgar, puesto que al juzgar entra siempre en danza la verdad, mientras que puede pasarse siempre de un pensamiento a su contrario sin preguntarse por la verdad. Para evitar malentendidos obsérvese, además, que este paso ocurre en la conciencia de una persona que piensa, pero que tanto el pensamiento a partir del cual se procede como el pensamiento al que se llega existen antes de que esto suceda; de modo que mediante este proceso mental no se cambia nada ni por lo que respecta a la constitución, ni por lo que respecta a las interrelaciones de los pensamientos.

Quizás ese acto de negar, que arrastra una cuestionable existencia como polo opuesto del acto de juzgar, es una construcción quimérica, formada por la fusión del acto de juzgar y de aquella negación que reconocí como parte integrante del pensamiento y a la que, en el lenguaje, corresponde la palabra «no» como parte integrante del predicado; quimérica porque esas partes son de géneros completamente distintos. El juzgar, como proceso mental, necesita de la persona que juzga como su portador; pero la negación, como parte integrante del pensamiento, no necesita, al igual que el pensamiento, ningún portador; no ha de entenderse como contenido de conciencia. Y, con todo, no es totalmente incomprensible cómo puede originarse, al menos, la apariencia de tal construcción quimérica. El lenguaje no tiene ninguna palabra especial, ninguna sílaba especial para la fuerza asertórica, sino que ésta reside en la forma de la oración asertórica y está estampada especialmente en el predicado. Por otra parte, la

palabra «no» está estrechamente unida al predicado y puede contemplarse como parte integrante de él. Así puede parecer que se forma una conexión entre la palabra «no» y la fuerza asertórica que es lo que lingüísticamente corresponde al acto de juzgar.

Resulta incómodo, sin embargo, distinguir entre ambos géneros de negación. En realidad, he introducido solamente el polo opuesto del juzgar para acomodarme yo mismo a una con-
153 cepción que me es extraña. Vuelvo, pues, ahora a mi / manera primitiva de hablar. Lo que provisionalmente he designado polo opuesto del juzgar lo consideraré ahora como un segundo género del juzgar, sin admitir con ello que haya tal segundo género. Reuniré ambos opuestos polares bajo el término común «juzgar», lo cual es admisible porque, ciertamente, ambos opuestos polares están emparejados. La pregunta ha de plantearse entonces del modo siguiente:

¿Hay dos maneras distintas de juzgar, una de las cuáles se usa para dar respuesta afirmativa a una pregunta, otra para darla negativa? ¿O es el juzgar el mismo acto en ambos casos? ¿Pertenece la negación al juzgar? ¿O es la negación parte del pensamiento que subyace al juzgar? ¿Es también el juzgar, en el caso de que se responda negativamente a una pregunta, la aceptación de la verdad de un pensamiento? Entonces ése no será el pensamiento contenido inmediatamente en la pregunta, sino su opuesto.

Sea, por ejemplo, la pregunta «¿Incendió el acusado intencionalmente su casa?». ¿Cómo podrá la respuesta, si resulta ser negativa, adoptar la forma de una oración asertórica? Si hay una manera particular de juzgar para el negar, entonces tenemos que tener, correlativamente, una manera particular de aseverar. En este caso digo algo así como «es falso que...» y establezco que esta forma de palabras ha de llevar siempre unida a ella fuerza asertórica. Así, la respuesta rezaría más o menos como sigue: «Es falso que el acusado haya incendiado su casa intencionalmente».

Si, por el contrario, hay una sola manera de juzgar, se dirá con fuerza asertórica: «El acusado no incendió su casa intencionalmente». Y aquí se presenta como verdadero el pensamiento opuesto al expresado en la pregunta. La palabra «no», pertenece aquí a la expresión de ese pensamien-

to. Vuelvo ahora a los dos razonamientos que he comparado hace un momento. Allí la segunda premisa del primer razonamiento era la respuesta negativa a la pregunta «¿Estaba el acusado en Berlín el día del asesinato?», es decir: la elegida para el caso de que haya solamente una manera de juzgar. El pensamiento contenido en esa premisa está contenido en la oración que hace de antecedente de la primera premisa, pero emitido sin fuerza asertórica. La segunda premisa del segundo razonamiento era la respuesta afirmativa a la pregunta «¿Estaba el acusado en Roma el día del asesinato?». Estos razonamientos proceden de acuerdo con las mismas leyes de razonamiento, y ello favorece la opinión de que el juzgar es el mismo tanto en el caso de una respuesta negativa a una pregunta como en el caso de una afirmativa. Si, por el contrario, tuviésemos que reconocer en el caso del negar una manera particular de juzgar a la que correspondiese en el reino de las palabras y oraciones una manera particular de aseverar, el asunto sería distinto. La primera premisa del primer razonamiento rezaba como antes: «Si el acusado no estaba en Berlín el día del asesinato, entonces no cometió el asesinato». Aquí no se podría decir: «Si es falso que el acusado estaba en Berlín el día del asesinato» puesto que se ha establecido que las palabras «es falso» han de llevar siempre unida a ellas fuerza asertórica; pero al aceptar la verdad de esta primera premi-
154 sa, no se acepta la verdad ni del / antecedente ni del consecuente contenidos en ella. La segunda premisa tiene ahora que rezar como sigue: «Es falso que el acusado estaba en Berlín el día del asesinato», pues, como premisa, debe emitirse con fuerza asertórica. Ahora bien, ya no es posible llevar a cabo el razonamiento como antes, puesto que el pensamiento de la segunda premisa ya no coincide con el antecedente de la primera premisa, sino que es el pensamiento de que el acusado estaba en Berlín el día del asesinato. Si, a pesar de todo, se quiere hacer que el razonamiento valga, entonces se acepta con ello que en la segunda premisa está contenido el pensamiento de que el acusado no estaba en Berlín el día del asesinato. Con ello se separa el negar del juzgar, se extirpa el sentido de «es falso que...» y se une la negación con el pensamiento.

Así pues, ha de rechazarse la suposición de que hay dos maneras de juzgar. ¿Pero qué es lo que depende de esta decisión? Quizás se la podría considerar como de poco valor si mediante ella no se llevase a cabo un ahorro de componentes lógicos primitivos y de sus correlatos en el lenguaje. Bajo la suposición de dos maneras diferentes de juzgar necesitamos:

1. La fuerza asertórica para el caso de la afirmación,
2. La fuerza asertórica para el caso de la negación, acaso unida indisolublemente a la palabra «falso»,
3. Una palabra negativa como «no» en las oraciones que se emiten sin fuerza asertórica.

Si, por otra parte, suponemos sólo una única manera de juzgar, tenemos necesidad solamente de:

1. La fuerza asertórica,
2. Una palabra negativa.

Tal ahorro muestra siempre que se ha avanzado en el análisis, y esto produce una visión más clara. Con ello se asocia el ahorro de una ley de razonamiento. En virtud de nuestra decisión, tenemos suficiente con una ley allí donde antes necesitábamos dos. Si podemos tener suficiente con un género de juzgar, entonces también tenemos que tener suficiente, y, en consecuencia, no podemos asignar a uno de los géneros de juzgar el establecimiento del orden y la conexión y al otro la destrucción.

Así pues, a cada pensamiento le corresponde uno contradictorio[5], de manera que un pensamiento se da por falso cuando se reconoce como verdadero su contradictorio. La oración que expresa el pensamiento contradictorio se forma a partir de la expresión del pensamiento original por medio de una palabra negativa.

La palabra o sílaba negativas parecen a menudo asociarse más estrechamente a una parte de la oración; por ejemplo,

[5] Podría decirse también «uno que se le opone».

al predicado. Y de ahí puede surgir la opinión de que lo que es negado no es el contenido total de la oración, sino el de esa parte de la oración. Se puede decir de una persona que es desconocida declarando mediante ello que el pensamiento de que es conocida es falso. Esto puede considerarse tam-
155 bién como respuesta / negativa a la pregunta «¿Es conocida esa persona?», a partir de lo cual se ve que con ello no se niega solamente el sentido de una palabra. Es incorrecto decir: «Puesto que la sílaba negativa está unida a una parte de la oración, no se niega el sentido de la oración entera.» Antes bien: puesto que la sílaba negativa se ha unido a una parte de la oración, se niega el contenido de la oración entera. Es decir: así surge una oración cuyo pensamiento contradice al de la oración original.

No pretendo con esto discutir que algunas veces la negación se extienda sólo a una parte del pensamiento total.

El pensamiento que contradice a otro pensamiento es el sentido de una oración a partir de la cual es fácil construir la oración que expresa el pensamiento contradictorio. Consecuentemente, el pensamiento que contradice a otro pensamiento parece estar compuesto de este último y la negación. Con esto no me refiero al acto de negar. Pero las palabras «compuesto», «consistir», «parte integrante», «parte» pueden inducir a una comprensión incorrecta. Cuando hablo aquí de partes no me refiero a partes que tienen entre sí la misma independencia que, por otro lado, es usual entre las partes de un todo. El pensamiento no necesita de ningún complemento para su existencia; es completo en sí. Por el contrario, la negación necesita ser completada por un pensamiento. Las dos partes integrantes, si se quiere usar esa expresión, son completamente heterogéneas y contribuyen de una manera completamente distinta a la formación del todo. Una de ellas completa; la otra es completada. Y, por medio de esa compleción, el todo se mantiene unido. Para hacer también perceptible en el lenguaje la necesidad de compleción, puede escribirse «la negación de...». Aquí el hueco existente después del «de» indica dónde se ha de introducir la compleción, puesto que al completar le corresponde en el reino del pensamiento y sus partes algo similar en el reino de las

oraciones y sus partes[b]. Un ejemplo puede hacer incluso más claro lo que quiero decir. El pensamiento que contradice al pensamiento

de que $(21/20)^{100}$ es igual a $\sqrt[10]{10^{21}}$

es el pensamiento

de que $(21/20)^{100}$ no es igual a $\sqrt[10]{10^{21}}$.

Puede decirse también: «El pensamiento

de que $(21/20)^{100}$ no es igual a $\sqrt[10]{10^{21}}$

es la negación del pensamiento

de que $(21/20)^{100}$ es igual a $\sqrt[10]{10^{21}}$.»

156 Esta última expresión después del penúltimo «es» permite reconocer la composición del pensamiento a partir de una parte necesitada de compleción y de otra que la completa. A partir de ahora usaré siempre la palabra «negación» —excepto cuando vaya entre comillas— con el artículo determinado. El artículo determinado «la» en la expresión

«La negación del pensamiento de que 3 es mayor que 5»

permite reconocer que esa expresión pretende designar una determinada cosa singular. Esa cosa singular es aquí un pensamiento. El artículo determinado convierte a toda la expresión en un nombre singular, algo que hace las funciones de un nombre propio.

La negación de un pensamiento es ella misma un pensa-

[b] En lugar de la preposición «de» («*von*») seguida del substantivo (en alemán) puede estar el genitivo del substantivo que, aunque pueda ser en la mayor parte de los casos lingüísticamente adecuado, sin embargo, no se presta bien para el propósito de expresar la parte necesitada de compleción. [Aunque este párrafo aparece en el original intercalado en el texto, he preferido, dado su carácter marginal, presentarlo como una nota.]

miento, y puede servir, a su vez, para completar la negación. Si uso la negación del pensamiento de que $(21/20)^{100}$ es igual a $\sqrt[10]{10^{21}}$, para completar la negación obtengo: la negación de la negación del pensamiento de que $(21/20)^{100}$ es igual a $\sqrt[10]{10^{21}}$. Esto es, de nuevo, un pensamiento. Se obtienen designaciones de pensamientos formados de esta manera, de acuerdo con el patrón

«la negación de la negación de *A*»,

donde «*A*» representa la designación de un pensamiento. Tal designación ha de entenderse, por lo pronto, como compuesta de las partes

«la negación de...»

y

«la negación de *A*».

Pero es también posible concebirla como formada por las partes

«la negación de la negación de...»

y «*A*».

Aquí he unido primero la parte media de la designación con la parte que está a su izquierda y, a continuación, lo así obtenido con la parte «*A*» que está a la derecha, mientras que originariamente la parte media estaba unida con «*A*» y la designación así obtenida:

«la negación de *A*»

se unió con lo que estaba a la izquierda,

«la negación de...».

A las dos concepciones diferentes de la designación corres-

ponden también dos concepciones diferentes de la estructura del pensamiento designado.

Mediante la comparación de las designaciones

> «la negación de la negación de que $(21/20)^{100}$ es igual a $\sqrt[10]{10^{21}}$»

y

> «la negación de la negación de que 5 es mayor que 3»

se reconoce una parte componente común:

> «la negación de la negación de...»,

157 que es la designación de la parte común de los dos pensamientos necesitada de compleción. En cada uno de ambos casos se completa mediante un pensamiento; en el primer caso mediante el pensamiento de que $(21/20)^{100}$ es igual a $\sqrt[10]{10^{21}}$; en el segundo caso mediante el pensamiento de que 5 es mayor que 3.

El resultado de cada compleción es en ambos casos un pensamiento. Al componente común necesitado de compleción se le puede llamar doble negación. Este ejemplo muestra cómo algo que necesita compleción puede fundirse con algo que necesita compleción para formar algo necesitado de compleción. Aquí se da el caso particular de algo —la negación de...— que se funde consigo mismo. Desde luego, fallan aquí las imágenes tomadas de la región de lo corporal, pues un cuerpo no se puede fundir consigo mismo de modo que el resultado consista en algo distinto de él. Pero, ciertamente, tampoco los cuerpos están necesitados de compleción en el sentido que se le quiere dar aquí a esta expresión. Podemos juntar cuerpos congruentes, y en ese caso tendremos también congruencia en la región de las designaciones. Pero a designaciones congruentes les corresponde lo mismo en la región de lo designado.

Las expresiones metafóricas, usadas con cuidado, pueden, después de todo, contribuir a la elucidación. Comparo lo que necesita compleción con una prenda de vestir, como

una chaqueta, que no puede mantenerse erguida por sí, misma, sino que necesita alguien que la lleve. La persona que ya está vestida con ella puede ponerse otra prenda; por ejemplo, un abrigo. Las dos prendas se unen para formar una única prenda. De esta manera, es posible una doble concepción. Puede decirse que la persona que ya llevaba puesta una chaqueta se pone ahora una segunda prenda, un abrigo, o que su vestido está compuesto de dos prendas: chaqueta y abrigo. Ambas concepciones están por igual completamente justificadas. La prenda que se añade se une siempre a la que ya estaba allí para formar una nueva. Desde luego, no ha de olvidarse tampoco que el ponerse prendas o el juntar cosas, son procesos que ocurren en el tiempo, mientras que su correlato en la región de los pensamientos es atemporal.

Si *A* es un pensamiento que no pertenece al mundo de ficción, la negación de *A* tampoco pertenece al mundo de ficción. De los dos pensamientos, *A* y la negación de *A*, siempre hay uno y sólo uno que es verdadero. Del mismo modo también, de los dos pensamientos, la negación de *A* y la negación de la negación de *A*, hay siempre uno y sólo uno que es verdadero. Ahora bien, o la negación de *A* es verdadera o no es verdadera. En el primer caso ni *A* ni la negación de la negación de *A* son verdaderas. En el segundo caso, tanto *A* como la negación de la negación de *A* son verdaderas. Así pues, de los dos pensamientos —*A* y la negación de la negación de *A*—, o bien son los dos verdaderos o ninguno de ellos lo es. Esto puede expresarse también así:

> el vestir un pensamiento con doble negación no altera el valor de verdad del pensamiento.

INVESTIGACIONES LÓGICAS (TERCERA PARTE): COMPOSICIÓN DE PENSAMIENTOS*

36 El rendimiento del lenguaje es asombroso. Con pocas sílabas expresa un número incalculable de pensamientos hasta tal punto que, para un pensamiento que ha sido captado por primera vez por un habitante de la Tierra, encuentra un ropaje en el cual otro, para el que es completamente nuevo, puede reconocerlo. Esto sería imposible si en el pensamiento no pudiéramos distinguir partes que correspondan a partes de una oración, de modo que la estructura de la oración pueda valer como figura de la estructura del pensamiento. Desde luego, hablamos en realidad analógicamente cuando transferimos la relación del todo y de la parte a los pensamientos. Pero la analogía es tan próxima y, en general, tan apropiada que difícilmente nos sentiremos molestos con las cojeras que han de producirse.

Así pues, si contemplamos los pensamientos como compuestos de partes simples y a éstas se las hace corresponder, a su vez, con partes simples de la oración, entonces se vuelve comprensible cómo se puede formar, a partir de unas pocas partes de oraciones, una gran multitud de oraciones a las cuales corresponde, a su vez, una gran multitud de pensamientos. Cabe ahora preguntarse cómo tiene lugar la construcción del pensamiento y cómo se combinan sus partes de modo que sea algo más que las partes aisladas. En mi ensayo

* Este trabajo apareció originalmente como «Logische Untersuchungen. Dritter Teil: Gedankengefüge» y fue publicado en *Beiträge zur Philosophie des deutschen Idealismus*, 3, 1923, pp. 36-51. En este ensayo Frege analiza seis géneros diferentes de funciones de verdad (lo que él llama «composición de pensamientos») elementales.

37 «La negación»[1] / he contemplado el caso en que un pensamiento parece estar compuesto de una parte que necesita compleción —o, como también puede decirse, insaturada, a la que corresponde en el lenguaje la palabra para negación—, y de un pensamiento. No podemos negar sin que haya algo que se niegue, y esto es un pensamiento. La cohesión del todo se logra en virtud de que el pensamiento satura la parte insaturada o, como también puede decirse, completa la parte necesitada de compleción. Y cabe la conjetura de que, para la lógica en general, la composición en un todo siempre tiene lugar mediante la saturación de algo insaturado[2].

Hay que contemplar ahora un caso particular de tal composición, a saber: aquel en que dos pensamientos se combinan para formar un único pensamiento. En la región del lenguaje le corresponderá a esto la combinación de dos oraciones en un todo que es asimismo una oración. Introduzco la expresión «composición de pensamientos» por analogía con la expresión gramatical «oración compuesta»[a], sin querer decir con esto que toda oración compuesta tenga como sentido una composición de pensamientos o que toda composición de pensamientos sea una oración compuesta. Por composición de pensamientos entiendo un pensamiento que consta de pensamientos, pero no sólo de pensamientos. Un pensamiento es, efectivamente, completo y saturado y no necesita para existir ningún complemento. Por eso los pensamientos no están pegados unos a otros a no ser que se conecten unos a otros mediante algo que no es un pensamiento. Tenemos derecho a conjeturar que esa conectiva es insaturada. La composición de pensamientos ha de ser ella mis-

[1] Volumen 1 de esta revista, p. 143. [Cf. pp. 226-247 de este volumen.]

[2] Aquí, y en lo que sigue, no debe perderse de vista que este saturar, este componer, no es ningún proceso temporal.

[a] La analogía a la que se hace referencia es la existente entre los términos alemanes *Satzgefüge* y *Gedankengefüge*. Para respetarla habría que traducirlos al castellano, o bien por el par oración compuesta/pensamiento compuesto, lo cual resulta desorientador en el caso de los pensamientos, o bien por el par composición de oraciones/composición de pensamientos, que presentaría la misma dificultad respecto de las oraciones. He preferido, por tanto, no respetar completamente la analogía y hacer esta advertencia.

ma un pensamiento, es decir: algo para lo que valga: o es verdadero o es falso; *tertium non datur*.

No toda oración compuesta, lingüísticamente hablando, de oraciones puede proporcionarnos un ejemplo utilizable, puesto que la gramática admite como oraciones lo que la lógica no puede reconocer como oraciones genuinas, puesto que no expresan un pensamiento. Esto nos lo muestran las oraciones de relativo, pues en una oración de relativo que haya sido separada de su oración principal no podemos saber qué se supone que designa el pronombre relativo. En tal oración no tenemos un sentido por cuya verdad podamos preguntar; en otras palabras, no tenemos un pensamiento como sentido de una oración de relativo separada. Por tanto, no podemos esperar que a una oración compuesta, que conste de una oración principal y de una oración de relativo, le corresponda como sentido una composición de pensamientos.

PRIMER GÉNERO DE COMPOSICIÓN DE PENSAMIENTOS

El caso más sencillo parece ser, lingüísticamente hablando, aquel en que una oración principal está unida mediante «y» a una oración principal. Sin embargo, el asunto no es tan sencillo como a primera vista parece, puesto que en una oración asertórica ha de distinguirse entre dos cosas: el pensa-
38 miento expresado y la aserción. Sólo de lo primero / se trata aquí, puesto que no son los actos de juzgar los que han de unirse[3]. Entiendo, por tanto, que las oraciones que han de unirse con «y» han de emitirse sin fuerza asertórica. El modo más fácil de eliminar la fuerza asertórica es transformar el todo en una pregunta, puesto que en la pregunta se puede expresar el mismo pensamiento que en una oración asertórica, pero sin aserción. Si unimos mediante «y» dos

[3] A lo que parece los lógicos entienden a menudo por «juicio» más o menos lo que yo llamo pensamiento. Yo digo: se juzga en tanto que se acepta un pensamiento como verdadero. Llamo juicio al acto de esa aceptación. El juicio se manifiesta mediante una oración emitida con fuerza asertórica. Pero se puede captar y expresar un pensamiento sin aceptarlo como verdadero, esto es, sin juzgar.

oraciones ninguna de las cuales se emite con fuerza asertórica, entonces hemos de preguntar si el sentido del todo resultante es un pensamiento. Pues no solamente cada una de las dos oraciones que son parte del todo, sino también éste, tienen que tener un sentido que pueda convertirse en el contenido de una pregunta. Si se pregunta a los jurados «¿Encendió el acusado intencionalmente la pila de leña y provocó intencionalmente el incendio del bosque?», entonces depende de si hay aquí dos preguntas o solamente una. Si queda a discreción de los jurados el responder afirmativamente a la pregunta concerniente a la pila de leña, pero negativamente a la concerniente al incendio del bosque, entonces tenemos dos preguntas cada una de las cuales contiene un pensamiento. No entra en consideración aquí un pensamiento formado por la composición de ambos pensamientos. Pero, si a los jurados solamente se les permite responder «sí» o «no» sin descomponer el todo en preguntas parciales —y esto es lo que supongo que sucede aquí—, entonces este todo es una única pregunta, y ésta habrá de responderse afirmativamente sólo si el acusado actuó intencionalmente tanto al encender la pila de leña como al provocar el incendio del bosque. En cualquier otro caso la pregunta ha de responderse negativamente. Así pues, si uno de los jurados opina que, ciertamente, el acusado encendió intencionalmente la pila de leña, pero que después el fuego se propagó, sin que ésa fuera la intención del acusado, y alcanzó el bosque, entonces debe de responderse negativamente a la pregunta. Por ello ha de distinguirse el pensamiento de la pregunta entera de los pensamientos parciales. Aquélla contiene, además de los dos pensamientos parciales, lo que los combina, y a esto le corresponde, lingüísticamente hablando, el «y». Esta palabra se usa aquí de una manera particular. Aquí sólo entra en consideración como conjunción entre dos oraciones propiamente dichas. Llamo oración propiamente dicha a aquella que expresa un pensamiento. Pero un pensamiento es algo para lo que vale: o es verdadero o falso; *tertium non datur*. El «y» del que se habla aquí solamente puede unir oraciones que sean emitidas sin fuerza asertórica. Con esto no se pretende excluir el acto del juicio, pero, si se da, ha de relacionarse con la composición de pensamientos en su totalidad.

Si queremos proponer como verdadera una composición de este primer género, podemos usar eventualmente la locución «es verdadero que... y que...».

Del mismo modo que nuestro «y» no une oraciones asertóricas, así tampoco ha de unir oraciones interrogativas. En nuestros ejemplos, a los jurados se les planteaba una única
39 pregunta. / Pero el pensamiento que esa pregunta presenta para que sea juzgado es una combinación de dos pensamientos.Ahora bien, el jurado, en su respuesta, ha de dar solamente un único juicio. Desde luego, esto puede tener el aspecto de una rebuscada sutileza. Pues ¿no es ciertamente lo mismo que el jurado responda afirmativamente a la pregunta «¿Encendió intencionalmente el acusado la pila de leña?» y a continuación a la pregunta «¿Provocó el acusado intencionalmente el incendio del bosque?» o que conteste de un golpe afirmativamente a la pregunta que se le plantea? Esto puede parecer así en el caso de una respuesta afirmativa, pero la diferencia es más clara en el caso de una pregunta que se responde negativamente. Por esto es útil expresar el pensamiento en una pregunta, puesto que, para que el pensamiento se capte correctamente, ha de contemplarse tanto el caso de la negación como el de la afirmación.

El «y», determinado así de manera más precisa por lo que respecta a su manera de uso, parece doblemente insaturado. Exige, para su saturación, una oración que lo preceda y una oración que lo siga. También lo que corresponde a «y» en el reino del sentido tiene que ser doblemente insaturado; en tanto que es saturado por medio de pensamientos, los combina[4]. Como mera cosa, la letra «y» no es, desde luego, más insaturada que cualquier otra cosa. Se la puede llamar insaturada con respecto a su manera de uso como signo que ha de expresar un sentido, puesto que aquí sólo puede tener el sentido que se pretende que tenga cuando se coloca entre dos oraciones. Su finalidad como signo reclama una compleción por medio de una oración que la preceda y otra que la siga. En rigor, la insaturación ocurre en la región del sentido, y de allí es transferida al signo.

---

[4] Cfr. p. 37 [p. 249-250 de este volumen].

Si «*A*» es una oración propiamente dicha que no se emite con fuerza asertórica ni tampoco como pregunta, y si lo mismo vale respecto de «*B*», entonces «*A* y *B*» es igualmente una oración propiamente dicha y su sentido es una composición de pensamientos del primer género. Por tanto, digo también: «*A* y *B*» expresa una composición de pensamientos del primer género.

Que «*B* y *A*» tiene el mismo sentido que «*A* y *B*» se comprende, sin necesidad de demostración, meramente al darse uno cuenta del sentido. Tenemos aquí un caso en el que a expresiones lingüísticamente distintas les corresponde el mismo pensamiento. Esta discrepancia entre el signo que expresa y el pensamiento expresado es una consecuencia inevitable de la diferencia entre los fenómenos espacio-temporales y el mundo de los pensamientos[5].

Podemos finalmente señalar una inferencia que vale aquí:

A es verdadera[6];
B es verdadera;
por tanto, (*A* y *B*) es verdadera.

40 SEGUNDO GÉNERO DE COMPOSICIÓN DE PENSAMIENTOS

La negación de una composición del primer género entre un pensamiento y otro pensamiento es ella misma una composición de esos dos mismos pensamientos. Llamaré a esto composición de pensamientos del segundo género. Siempre que una composición de dos pensamientos perteneciente al primer género es falsa, la composición de esos pensamientos perteneciente al segundo género es verdadera, e inversamente. Entonces una composición de pensamientos del se-

[5] Otro caso de este género es el de que «*A* y *A*» tiene el mismo sentido que «*A*».

[6] Cuando escribo «*A* es verdadera», quiero decir más exactamente: «El pensamiento expresado en la oración "*A*" es verdadero». Similarmente en casos semejantes.

gundo género es falsa solamente si cada uno de los pensamientos que la componen es verdadero. Una composición de pensamientos del segundo género es siempre verdadera si al menos uno de los pensamientos componentes es falso. Aquí se supone siempre que los pensamientos en cuestión no pertenecen al mundo de ficción. Al declarar como verdadera una composición de pensamientos del segundo género, doy por incompatibles a los pensamientos componentes.

Sin saber si

$(21/20)^{100}$ es mayor que $\sqrt[10]{10^{21}}$

y sin saber si

$(21/20)^{100}$ es menor que $\sqrt[10]{10^{21}}$

puedo, sin embargo, aceptar que la composición de ambos pensamientos perteneciente al primer género es falsa. Por consiguiente, la composición de ambos pensamientos perteneciente al segundo género es verdadera. Además de los pensamientos componentes tenemos algo que los combina. La conectiva es también aquí doblemente insaturada. Y la composición se produce al saturar los pensamientos componentes a la conectiva.

Para expresar brevemente una composición de pensamientos de este género, escribo

«No [*A* y *B*]»,

donde «*A*» y «*B*» son las oraciones correspondientes a los pensamientos componentes. En esta expresión destaca con más claridad la conectiva: su sentido es lo que, aparte de las letras «*A*» y «*B*», ocurre en la expresión. Los dos huecos de la expresión

«No [y   ]»

dejan ver la doble insaturación. La conectiva es el sentido doblemente insaturado de esa expresión doblemente insaturada. Cuando llenamos los huecos por medio de expresiones

de pensamientos, formamos la expresión de una combinación de pensamientos del segundo género. Pero, en realidad, no debe decirse que la composición de pensamientos se origine así, puesto que es un pensamiento y un pensamiento no se origina.

En una composición de pensamientos del primer género, ambos pensamientos son intercambiables. La misma intercambiabilidad tiene que existir también en la negación de una composición de pensamientos. Por tanto, si «No [*A* y *B*]» expresa una composición de pensamientos, entonces «No [*B* y *A*]» expresa también la misma composición de los mismos pensamientos. Esta intercambiabilidad no debe entenderse aquí, en la misma medida en que no se entiende para la composición del primer género, como un teorema, puesto que en el reino del sentido no existe ninguna diferen-
41 cia entre estas expresiones. Es, por tanto, autoevidente / que el sentido de la segunda oración compuesta es verdadero si el sentido de la primera es verdadero, pues es el mismo sentido.

También puede citarse aquí una inferencia:

No [*A* y *B*] es verdadero;
A es verdadero; por tanto,
B es falso.

TERCER GÉNERO DE COMPOSICIÓN DE PENSAMIENTOS

La composición del primer género, constituida por la negación de un primer pensamiento con la negación de un segundo pensamiento, es también una composición del primer pensamiento con el segundo. Llamo a esto composición del tercer género del primer pensamiento con el segundo. Sea, por ejemplo, el primer pensamiento que Pablo sabe leer y el segundo pensamiento que Pablo sabe escribir. Entonces la composición de ambos pensamientos perteneciente al tercer género es el pensamiento de que Pablo no sabe ni leer ni escribir. Una composición de pensamientos del tercer género es entonces verdadera solamente si cada uno de los pensa-

mientos en combinación es falso. Una composición de pensamientos del tercer género es falsa si al menos uno de los pensamientos componentes es verdadero. En la combinación de pensamientos del tercer género ambos pensamientos componentes son también intercambiables. Si «*A*» expresa un pensamiento, entonces «no *A*» tiene que expresar la negación de ese pensamiento. Lo mismo vale para «*B*». Si «*A*» y «*B*» son dos oraciones propiamente dichas, entonces el sentido de

«(no *A*) y (no *B*)»,

para lo cual escribo también

«ni *A* ni *B*»,

es la composición del tercer género de los pensamientos expresados por «*A*» y «*B*».

La conectiva es aquí el sentido de todo aquello que, aparte de las letras «*A*» y «*B*», está en la expresión. Los dos huecos en

«(no) y (no)»

o en

«ni , ni »

muestran la doble insaturación de estas expresiones, que corresponde a la doble insaturación de la conectiva.

Cuando ésta es saturada por pensamientos, se produce la composición del tercer género de esos pensamientos.

Podemos citar aquí también una inferencia:

A es falso;
B es falso; por tanto,
(ni *A* ni *B*) es falso.

Los paréntesis intentan hacer claro que su contenido es la totalidad cuyo sentido se propone como verdadero.

CUARTO GENERO DE COMPOSICIÓN DE PENSAMIENTOS

La negación de una composición del tercer género de dos pensamientos es igualmente una composición de ambos pensamientos. Tal composición puede llamarse composi-
42 ción / de pensamientos del cuarto género. La composición del cuarto género de dos pensamientos es una composición del segundo género formada a partir de las negaciones de esos pensamientos. Cuando tal composición de pensamientos se propone como verdadera, se dice con ello que al menos uno de los pensamientos componentes es verdadero. Una composición de pensamientos del cuarto género es entonces falsa solamente cuando cada uno de los pensamientos componentes es falso. Si, de nuevo, «*A*» y «*B*» son oraciones propiamente dichas, entonces el sentido de

«no [(no *A*) y (no *B*)]»

es una composición de pensamientos del cuarto género, de los dos pensamientos expresados mediante «*A*» y «*B*», Lo mismo vale para

«no [ni *A* ni *B*]».

Aún más brevemente escribimos para esto

«*A* o *B*».

El «o» tomado en este sentido aparece solamente entre oraciones, ciertamente entre oraciones propiamente dichas. Al aceptar como verdadera tal composición de pensamientos, no excluyo que ambos pensamientos componentes sean verdaderos. Tenemos aquí el «o» no exclusivo. La conectiva es el sentido de lo que aparece en «*A* o *B*» dejando aparte «*A*» y «*B*», por consiguiente de

«(o   )»,

donde ambos huecos a la izquierda y derecha de «o» indican

la doble insaturación de la conectiva. Las oraciones unidas mediante «o» han de entenderse solamente como expresiones de pensamientos, y no, por lo tanto, como dotadas individualmente de fuerza asertórica. Por el contrario, la composición de pensamientos, como un todo, puede aceptarse como verdadera. En las expresiones lingüísticas esto no se destaca claramente. Si se asevera «5 es menor que 4, o 5 es mayor que 4», cada oración componente tiene la forma lingüística que tendría también si hubiera sido emitida por separado con fuerza asertórica, mientras que, de hecho, es solamente la composición total lo que se pretende proponer como verdadero.

Quizás se encuentre que el sentido dado aquí a la palabra «o» no concuerda siempre con el uso lingüístico. En contra de esto ha de advertirse, para empezar, que al determinar el sentido de las expresiones científicas no puede tenerse como objeto el hacerlas coincidir con el uso lingüístico ordinario; éste no es adecuado, en la mayor parte de los casos, para los fines científicos en los cuales se siente la necesidad de acuñar términos más exactos. Al investigador de la naturaleza tiene que estarle permitido el desviarse en el uso de la palabra «o»[b] de lo que, por otra parte, es lo corriente. En la región de la lógica, las resonancias de pensamientos concomitantes pueden ser perturbadoras. De acuerdo con lo que se ha dicho sobre el uso de la palabra «o», puede aseverarse conforme a la verdad: «Federico el Grande fue vencedor en Rossbach, o dos es mayor que tres».

Alguien pensará: «¡Qué barbaridad! ¿Qué tiene que ver la victoria de Rossbach con el sinsentido de que dos es mayor que tres?» Que dos es mayor que tres es falso, pero no es un sinsentido. El que la falsedad de un pensamiento sea fácil o difícil de discernir no representa ninguna diferencia para la lógica. En las oraciones unidas por «o», estamos acostumbrados a suponer que el sentido de una tiene algo que ver con el de la otra, que entre ellas existe algún modo de paren-
43 tesco; y, en algún / caso dado, se podrá incluso indicar tal parentesco, pero en otro caso se tendrá otro tipo, de modo

[b] El original alemán dice «oído» («*ohr*»), que presumiblemente es una errata. Debería decir «o» («*or*»).

que será imposible indicar un parentesco de sentido que estuviese vinculado siempre con la palabra «o» y que pudiera considerarse como perteneciente al sentido de esa palabra. Pero ¿por qué, en suma, añade el hablante la segunda oración? Si quiere aseverar que Federico el Grande venció en Rossbach, bastaba para ello con la primera oración; ha de suponerse, por otra parte, que el hablante no quiso decir que dos es mayor que tres. Si el hablante se hubiera contentado con la primera oración, habría dicho más con menos palabras. ¿Para qué, entonces, ese gasto de palabras? Esas preguntas nos conducen también a pensamientos concomitantes. Cualesquiera que sean las intenciones y motivos que el hablante tenga para decir justamente esto y no aquello, eso es algo que no nos interesa aquí; solamente nos interesa aquello que él dice.

Las composiciones de pensamientos de los cuatro primeros géneros tienen en común el que los pensamientos componentes son intercambiables.

También se sigue aquí una inferencia:

(A o B) es verdadero;
A es falso; por tanto,
B es verdadero.

QUINTO GÉNERO DE COMPOSICIÓN DE PENSAMIENTOS

Si a partir de la negación de un pensamiento y de un segundo pensamiento, formamos una composición del primer género, obtenemos una composición del quinto género del primer pensamiento con el segundo. Si «A» expresa el primer pensamiento y «B» el segundo pensamiento, entonces el sentido de

«(no A) y B»

es tal composición de pensamientos. Una composición de este género es entonces, y sólo entonces, verdadera si el primer pensamiento componente es falso, pero el segundo es

verdadero. Así, por ejemplo, la composición de pensamientos expresada por

«(no $3^2 = 2^3$) y ($2^4 = 4^2$)»

es verdadera; esto es : el pensamiento de que 3^2 no es igual a 2^3 y de que 2^4 es igual a 4^2. Una vez que alguien ha aceptado que 2^4 es igual a 4^2, conjetura quizás que, en general, el exponente y la base de una potencia son intercambiables. Otro busca corregir este error diciendo: «2^4 es igual a 4^2, pero 2^3 no es igual a 3^2». Si se pregunta ahora qué diferencia hay entre la unión con «y» y con «pero», habrá de contestarse: para lo que he llamado el pensamiento o el sentido de la oración es completamente irrelevante si se elige la locución «y» o «pero». La diferencia reside solamente en lo que llamo iluminación[7] del pensamiento; ésta no pertenece a la región de la lógica.

La conectiva de una composición de pensamientos del quinto género es el sentido doblemente necesitado de compleción de la expresión doblemente incompleta

(no) y ( )».

44 Aquí los pensamientos componentes no son intercambiables; pues

«(no *B*) y *A*»

no expresa lo mismo que

«(no *A*) y *B*».

La posición del primer pensamiento en la composición no es del mismo género que la del segundo pensamiento. Puesto que no me atrevo a acuñar una nueva palabra, estoy obligado a usar la palabra «posición» con un sentido transferido. Al

[7] Ver mi ensayo «El pensamiento» en el primer tomo de esta revista, p. 63 [pp. 193-194 ss. de este volumen].

hablar de expresiones escritas de pensamientos, la palabra «posición» se tomará en su significado espacial usual. A la posición en la expresión del pensamiento tiene que corresponderle algo en el pensamiento mismo, y reservo para esto la palabra «posición». Aquí no podemos hacer simplemente que los pensamientos cambien de posición; pero podemos colocar la negación del segundo pensamiento en la posición del primero y, al mismo tiempo, la negación del primer pensamiento en la posición del segundo. Desde luego, esto ha de entenderse *cum grano salis*, puesto que no estamos aludiendo a una operación en el tiempo y en el espacio. Por consiguiente, a partir de

«(no *A*) y *B*»

obtenemos

«(no [no *B*] y (no *A*)».

Pero, puesto que «no (no *B*)» tiene el mismo sentido que «*B*», tenemos que

«*B* y (no *A*)»,

que expresa lo mismo que

«(no *A*) y *B*».

SEXTO GÉNERO DE COMPOSICIÓN DE PENSAMIENTOS

La negación de una composición del quinto género de un pensamiento con un segundo pensamiento es una composición del sexto género del primer pensamiento con el segundo. Puede decirse también: la composición del segundo género de la negación del primer pensamiento con el segundo pensamiento es una composición del sexto género del primer pensamiento con el segundo. Una composición del quinto género de un primer pensamiento con un segundo es

entonces, y sólo entonces, verdadera cuando el primer pensamiento es falso, pero el segundo es verdadero. De aquí se sigue que una composición del sexto género de un primer pensamiento con un segundo es entonces, y sólo entonces, falsa cuando el primer pensamiento es falso, pero el segundo es verdadero. Por tanto, tal composición de pensamientos es verdadera cuando el primer pensamiento es verdadero, siendo indiferente que el segundo pensamiento sea verdadero o falso. Tal composición de pensamientos es también verdadera cuando el segundo pensamiento es falso, siendo indiferente si el primer pensamiento es verdadero o falso.

Sin saber si

$((21/20)^{100})^2$ es mayor que 2^2

y sin saber si

$(21/20)^{100}$ es mayor que 2,

puedo, sin embargo, aceptar que la composición del sexto género del primer pensamiento / con el segundo es verdadera.
45 La negación del primer pensamiento y del segundo pensamiento se excluyen mutuamente. Puede expresarse esto así:

«Si $(21/20)^{100}$ es mayor que 2, entonces $((21/20)^{100})^2$ es mayor que 2^2».

En lugar de «composición de pensamientos del sexto género», diré también «composición hipotética de pensamientos» y llamaré al primero de los pensamientos de una composición hipotética «consecuente» y al segundo «antecedente». Así, una composición hipotética de pensamientos es verdadera cuando el consecuente es verdadero. También es verdadera una composición hipotética de pensamientos cuando el antecedente es falso, siendo indiferente que el consecuente sea verdadero o falso. Ahora bien, el consecuente tiene que ser siempre un pensamiento.

Sean de nuevo «*A*» y «*B*» oraciones propiamente dichas; tenemos entonces en

«no [(no *A*) y *B*]»

la expresión de una composición hipotética cuyo consecuente es el sentido (contenido de pensamiento) de «*A*» y cuyo antecedente es el sentido de «*B*». Podemos escribir para esto

«Si *B*, entonces *A*».

Desde luego, pueden surgir dudas aquí. Puede quizás encontrarse que esto no cuadra con el uso lingüístico. En contra de esto ha de ponerse siempre de relieve que a la ciencia le tiene que estar permitido el tener su propio uso lingüístico, que no puede someterse siempre al lenguaje ordinario. Precisamente aquí veo yo la mayor dificultad de la filosofía: que para su trabajo encuentra una herramienta poco apropiada, a saber: el lenguaje ordinario a cuya formación han contribuido necesidades completamente distintas de las de la filosofía. Así también la lógica está obligada, la primera de todas, a forjarse una herramienta útil a partir de lo que ya tiene. Y, para ese trabajo, solamente encuentra, en principio, pocas herramientas utilizables.

La oración

«Si 2 es mayor que 3, entonces 4 es un número primo»

será sin duda considerada por muchos como sinsentido y, sin embargo, según lo que he establecido, es verdadera, puesto que el antecedente es falso. Ser falso no es ser sinsentido. Sin saber si

$\sqrt[10]{10^{21}}$ es mayor que$(21/20)^{100}$

puede aceptarse que, si

$\sqrt[10]{10^{21}}$ es mayor que $(21/20)^{100}$, entonces $(\sqrt[10]{10^{21}})^2$ es mayor que $((21/20)^{100})^2$;

y nadie verá en esto un sinsentido. Ahora bien, es falso que

$\sqrt[10]{10^{21}}$ sea mayor que$(21/20)^{100}$.

46 /Y es igualmente falso que

$(\sqrt[10]{10^{21}})^2$ sea mayor que $((21/20)^{100})^2$.

Si esto fuera tan fácil de ver como la falsedad de que 2 es mayor que 3, entonces la composición hipotética de pensamientos de este ejemplo parecería tan sinsentido como la de aquél. El que la falsedad de un pensamiento sea más fácil o más difícil de reconocer no importa por lo que respecta a la consideración lógica, puesto que la diferencia es psicológica.

El pensamiento expresado en la oración compuesta:

«Si tengo un gallo que ha puesto huevos hoy, entonces mañana por la mañana se derrumbará la catedral de Colonia»,

es también verdadero. «Pero aquí el antecedente y el consecuente no tienen en absoluto ninguna conexión interna», dirá quizás alguien. Ahora bien, en mi explicación no he exigido tal conexión y solamente pido que por «Si *B* entonces *A*» se entienda lo que he dicho y expresado en la forma

«No [(no *A*) y *B*».

Desde luego, esta concepción de una oración hipotética compuesta tiene que, en principio, causar extrañeza.

Mi explicación no pretende cuadrar con el uso lingüístico ordinario, el cual es en la mayoría de los casos demasiado vago y fluctuante para los propósitos de la lógica. Agólpanse aquí toda clase de cosas, por ejemplo, la relación de causa y efecto, la intención con la que el hablante emite una oración de la forma «Si *B* entonces *A*», la base sobre la cual se tiene por verdadero su contenido. El hablante da, quizás, pistas respecto a tales cuestiones que surgen entre los oyentes. Tales pistas pertenecen al ramaje que, en el lenguaje ordinario, adorna a menudo los pensamientos. Mi tarea aquí es, mediante la separación de lo accesorio, aislar como núcleo lógico una composición de dos pensamientos, una composición que he denominado composición hipotética de pensamientos. El examen de la estructura de los pensamien-

tos compuestos de dos pensamientos tiene que constituir el fundamento para la consideración de una multiplicidad de pensamientos compuestos.

Lo que he dicho sobre la expresión «Si *B* entonces *A*» no debe entenderse de manera que toda oración compuesta de esta forma exprese una composición hipotética de pensamientos. Si «*A*» no es por sí misma una expresión completa de un pensamiento y no es, por tanto, una oración propiamente dicha, o si «*B*» no es por sí misma una oración propiamente dicha, tenemos entonces un caso distinto. En la oración compuesta

«Si alguien es un asesino, entonces él es un criminal»,

ni la oración que hace de antecedente ni la oración que hace de consecuente expresan, tomadas en sí mismas, un pensamiento. Si lo que se expresa en la oración aislada del contexto «él es un criminal» es verdadero o falso es algo que, a falta de alguna indicación adicional, no puede decidirse, puesto que la palabra «él» no es un nombre propio y en la oración aislada del contexto y sin ninguna indicación adicional no designa nada. Se sigue entonces que nuestro consecuente no expresa ningún pensamiento y, por lo tanto, no es ninguna oración propiamente dicha. Lo mismo vale para nuestra oración que hace de antecedente, puesto
47 que / contiene un ingrediente —«alguien»—que no designa nada. A pesar de todo, la oración compuesta puede expresar un pensamiento. El «alguien» y el «él» señalan el uno al otro. Así pues, en virtud del «si ... entonces...» las dos oraciones se unen la una a la otra de tal manera que, juntas, expresan un pensamiento, mientras que en una composición hipotética de pensamientos podemos distinguir tres pensamientos, a saber: el antecedente, el consecuente y el pensamiento compuesto a partir de ambos pensamientos. Por consiguiente, no siempre una oración compuesta expresa una composición de pensamientos, y es muy esencial distinguir entre los dos casos que se dan en una oración compuesta de la forma

«Si *B*, entonces *A*».

Añado también aquí una inferencia:

[Si *B*, entonces *A*] es verdad,
B es verdadera; por tanto,
A es verdad.

En esta inferencia se pone de relieve quizás con la máxima claridad lo característico de la composición hipotética de pensamientos.

Es digno de mención el siguiente modo de inferencia:

[Si *C*, entonces *B*] es verdad;
[Si *B*, entonces *A*] es verdad; por tanto,
[Si *C*, entonces *A*] es verdad.

Quisiera mencionar aquí una manera de hablar desorientadora. Muchos matemáticos se expresan como si se pudiesen extraer conclusiones de un pensamiento cuya verdad es aún dudosa. Cuando se dice: «Infiero *A* a partir de *B*» o «Concluyo a partir de *B* la verdad de *A*», se entiende que *B* es una de las premisas, o la única premisa, de la inferencia. Pero antes de que se acepte la verdad de un pensamiento no se lo puede utilizar como premisa de una inferencia, no se puede inferir ni concluir nada a partir de él. Si, con todo, alguien opina que lo está haciendo, entonces está confundiendo, a lo que parece, la aceptación de la verdad de una composición hipotética de pensamientos con una inferencia en la que se toma el antecedente de esa composición como premisa. Ahora bien, la aceptación de la verdad del sentido de

«Si *C*, entonces *A*»

puede en efecto basarse en una inferencia, como en el ejemplo dado anteriormente, y allí puede ser dudoso si *C* es verdad, pero en este caso, el pensamiento expresado en «*C*» no es en absoluto premisa de esa conclusión, sino que la premisa era el sentido de la oración

«Si *C*, entonces *B*».

Si el pensamiento contenido en «*C*» fuese premisa de la inferencia, entonces no aparecería en el resultado de la conclusión, puesto que en esto consiste justamente el efecto de la conclusión.

48 Hemos visto que en una composición de pensamientos del quinto género puede reemplazarse el primer pensamiento por la negación del segundo y, al mismo tiempo, el segundo pensamiento por la negación del primero sin que el sentido del todo se altere. Ahora bien, puesto que una composición de pensamientos del sexto género es la negación de una composición de pensamientos del quinto género, lo mismo vale también para la propia composición de pensamientos del sexto género: en una composición hipotética se puede, sin alterar el sentido, reemplazar el antecedente por la negación del consecuente y, al mismo tiempo, el consecuente por la negación del antecedente —paso del *modus ponens* al *modus tollens*— contraposición.

SINOPSIS DE LAS SEIS COMPOSICIONES DE PENSAMIENTOS

I. *A* y *B*; II. no (*A* y *B*);
III. (no *A*) y (no *B*); IV. no ((no *A*) y (no *B*));
V. (no *A*) y *B*; VI. no ((no *A*) y *B*).

Resulta tentador a añadir

A y (no *B*);

pero el sentido de

«*A* y (no *B*)»

es el mismo que el de

«(no *B*) y *A*»,

para cualesquiera oraciones propiamente dichas «*A*» y «*B*». Ahora bien, puesto que

«(no *B*) y *A*»

tiene la misma forma que

«(no *A*) y *B*»,

no obtenemos aquí nada nuevo, sino otra vez, solamente, la expresión de una composición de pensamientos del quinto género, y en

«no (*A* y (no *B*))»

tenemos de nuevo la expresión de una composición de pensamientos del sexto género. Nuestros seis géneros de composición de pensamientos forman, de este modo, un todo concluso cuyos elementos primitivos parecen ser aquí la composición del primer género y la negación, La preeminencia que, según esto, parece tener la composición del primer género sobre los restantes, por aceptable que pueda parecer a los psicólogos, no tiene justificación lógica, puesto que cualquiera de los seis géneros de composición de pensamientos se puede tomar como fundamental y derivar a partir de él, con la ayuda de la negación, los restantes, de modo que, para la lógica, todos los seis géneros tienen igual justificación. Si, por ejemplo, se parte de la composición hipotética

Si *B*, entonces *C*

o

No ((no *C*) y *B*)

y se reemplaza «*C*» por «no *A*», se obtiene en ese caso

Si *B*, entonces no *A*

o

49 no (*A* y *B*).

Mediante la negación del todo se obtiene

no (si *B*, entonces no *A*)

o

A y *B*.

Según esto

«no (si *B*, entonces no *A*)»

dice lo mismo que

«*A* y *B*»,

que es una composición del primer género que se ha derivado a partir de una composición hipotética y la negación. Y, puesto que las demás composiciones de pensamientos pueden derivarse a partir de las composiciones del primer género y de la negación, todas las composiciones de pensamientos pertenecientes a nuestros seis géneros pueden derivarse a partir de las composiciones hipotéticas y la negación. Lo que se ha dicho sobre las composiciones del primero y sexto géneros vale en general para las composiciones de pensamientos de nuestros seis géneros, de modo que ninguno de esos géneros tiene preeminencia alguna sobre los otros. Cada uno de ellos puede servir como fundamento para la derivación de los otros. La elección no está determinada por situación lógica alguna.

Algo parecido tenemos en la fundamentación de la geometría. Pueden formularse dos geometrías diferentes de tal manera que algunos teoremas de la primera aparecen como axiomas en la segunda y algunos teoremas de la segunda como axiomas en la primera.

Considérense ahora los casos en que un pensamiento no en-

tra en composición con un pensamiento distinto sino consigo mismo. Si, de nuevo, «*A*» es una oración propiamente dicha

«*A* y *A*»

expresa el mismo pensamiento que «*A*». Lo primero no dice ni más ni menos que lo segundo. Asimismo,

«no (*A* y *A*)»

expresa lo mismo que «no *A*».

Del mismo modo

«(no *A*) y (no *A*)»

expresa lo mismo que «no *A*». Por consiguiente,

«no [(no *A*) y (no *A*)]»

expresa también lo mismo que «no no *A*» o que «*A*».

Ahora bien,

«no [(no *A*) y (no *A*)]»

expresa una composición del cuarto género. Por eso decimos también en su lugar

«*A* o *A*».

Por tanto, no solamente

«*A* y *A*»,

sino también

«*A* o *A*»

50 tiene el mismo sentido que «*A*».

Otra cosa sucede con las composiciones del quinto género. La composición de pensamientos expresada por

«[(no *A*) y *A*]»

es falsa, puesto que, de dos pensamientos de los cuales uno es la negación del otro, uno es siempre falso, de modo que también su composición del primer género es falsa. De acuerdo con esto, la composición del sexto género de un pensamiento consigo mismo, a saber: la expresada mediante

«no [(no *A*) y *A*]»,

es verdadera, si «*A*» es una oración propiamente dicha. Podemos traducir a palabras esta composición de pensamientos mediante

«Si *A*, entonces *A*»;

por ejemplo, «Si la Schneekoppe es más alta que el Brocken, entonces la Schneekoppe es más alta que el Brocken».

En tal caso se plantea la cuestión siguiente: ¿expresa esa oración un pensamiento? ¿No está vacía de contenido? ¿Qué se aprende de nuevo cuando se la oye? Bien, quizás antes de oírla esta verdad no había sido conocida en absoluto y, por tanto, tampoco aceptada. En este aspecto, se puede aprender de ella, bajo ciertas circunstancias, algo que es nuevo. Es, desde luego, una verdad innegable que la Schneekoppe es más alta que el Brocken si la Schneekoppe es más alta que el Brocken.

Puesto que sólo los pensamientos pueden ser verdaderos, esta oración compuesta tiene que expresar un pensamiento y, a pesar de su aparente falta de sentido, la negación de ese pensamiento es también un pensamiento. Tiene que tenerse presente siempre que se puede expresar un pensamiento sin aseverarlo. Aquí se trata solamente de pensamientos. La apariencia de falta de sentido sobreviene solamente por la fuerza asertórica con que automáticamente se piensa que ha sido emitida la oración. Pero ¿quién dice que alguien que la emite sin fuerza asertórica hace esto para proponer su contenido como verdadero? Quizás lo hace justamente con la intención contraria.

Esto puede generalizarse. Sea «*O*» una oración que, en

un caso particular, expresa una ley lógica, pero que no se propone como verdadera. Entonces es fácil que «no *O*» parezca un sinsentido, pero solamente porque se piensa que es emitida con fuerza asertórica. El aseverar un pensamiento que contradice una ley lógica puede parecer, de hecho, si no un sinsentido, al menos un absurdo, puesto que la verdad de una ley lógica parece evidente a partir de sí misma, a partir del sentido de su expresión. Pero un pensamiento que contradice a una ley lógica puede ser expresado porque puede ser negado. «*O*» misma parece carecer casi de contenido.

Puesto que toda composición de pensamientos es ella misma un pensamiento, puede entrar en composición con otros pensamientos. Así, la composición expresada mediante

«(*A* y *B*) y *C*»

está compuesta por los pensamientos expresados por

«*A* y *B*» y por «*C*».

Pero podemos también considerarla como si estuviera com-
51 puesta por los pensamientos expresados mediante

«*A*», «*B*», «*C*».

De este modo, pueden originarse[9] composiciones de pensamientos que contienen tres pensamientos. Otros ejemplos de composiciones formadas por tres pensamientos se expresan en

«no [(no *A*) y (*B* y *C*)]»

y

«no [(no *A*) y ((no *B*) y (no *C*))]».

---

[8] Más exactamente: si el pensamiento expresado por «*C*» es verdadero.
[9] Este originarse no ha de entenderse como un proceso temporal.

De este modo, también pueden encontrarse composiciones de pensamientos que contengan cuatro, cinco o más pensamientos.

Para la formación de todas estas composiciones son suficientes las composiciones de pensamientos del primer género y la negación, y cualquier otro de los seis géneros puede elegirse también en lugar del primero. Ahora bien, surge aquí la cuestión de si toda composición de pensamientos tiene tal formación. Por lo que respecta a la matemática, estoy convencido de que en ella no aparecen composiciones de formaciones distintas. También en la física, en la química y en la astronomía, difícilmente podría ser de otro modo; pero las oraciones finales reclaman un cierto cuidado y parecen exigir una investigación más precisa. Esta cuestión la dejaré aquí sin decidir. En todo caso, las composiciones de pensamientos formadas a partir de composiciones del primer género por medio de la negación parecen merecedoras de una denominación especial. Podrían llamarse composiciones matemáticas de pensamientos. Esto no ha de interpretarse como una afirmación de que hay composiciones de pensamientos de cualquier otro tipo. En otro aspecto, las composiciones matemáticas de pensamientos parecen también tener algo en común, a saber: si en una de ellas se reemplaza un pensamiento verdadero por un pensamiento verdadero, entonces la composición de pensamientos así formada es verdadera o falsa, según que la composición originaria sea verdadera o falsa. Lo mismo vale si en una composición matemática de pensamientos se reemplaza un pensamiento falso por otro falso. Así pues, diré que dos pensamientos tienen el mismo valor de verdad si ambos son verdaderos o ambos falsos. De acuerdo con esto, digo que el pensamiento expresado por «*A*» tiene el mismo valor de verdad que el expresado por «*B*» si

«*A* y *B*»

o

«(no *A*) y (no *B*)»

expresan un pensamiento verdadero. Habiendo establecido esto, nuestra tesis puede expresarse así:

> «Si en una composición matemática de pensamientos se reemplaza un pensamiento por otro pensamiento con el mismo valor de verdad, entonces la composición de pensamientos así obtenida tiene el mismo valor de verdad que la original.»

GENERALIDAD LÓGICA*

278 He publicado en esta revista un artículo sobre composición de pensamientos[a], en el que también ha encontrado un lugar la composición hipotética de pensamientos. Resulta natural buscar una transición desde éstos a lo que en la física, en la matemática y en la lógica se denomina *ley*. Ciertamente, expresamos muy a menudo una ley con la forma de una oración compuesta hipotética que consta de uno o más antecedentes y un consecuente. Pero, ya desde el principio, nos encontramos un obstáculo en el camino. Los pensamientos compuestos hipotéticos por mí considerados no pertenecen a las leyes, puesto que les falta la generalidad mediante la que las leyes se diferencian de los hechos individuales, aquellos que, por ejemplo, estamos acostumbrados a encontrar en la historia. De hecho, la diferencia entre leyes y hechos individuales está profundamente grabada. En ella descansa la diferencia fundamental entre la actividad en física y en historia. La primera se preocupa de encontrar leyes; la historia intenta establecer hechos individuales. Naturalmente, también la historia intenta comprender causalmente, y para ello tiene que suponer que, al menos, se da una legalidad.

---

* Este trabajo pue publicado bajo el título «Logische Allgemainheit» en G. Frege, *Nachgelassene Schriften*, Felix Meiner, Hamburgo, 1969, pp. 278-281. Los editores del *Nachlass* conjeturan que este fragmento fue concebido como la cuarta parte de las *Investigaciones lógicas* y, dada la referencia que se hace en el texto al artículo «Composición de pensamientos», su fecha de elaboración no podría ser anterior a 1923. Contiene lo que puede interpretarse como un anticipo de la distinción de Tarski entre lenguaje-objeto y metalenguaje.

[a] Ver «Composición de pensamientos», tercera parte de las *Investigaciones lógicas*, pp. 248-274 de este volumen.

Esto puede, en principio, ser suficiente para mostrar la necesidad de una consideración más a fondo de la generalidad.

El valor de una ley para nuestro conocimiento reside en que en ella están contenidos como casos particulares muchos, ciertamente infinitamente muchos, hechos individuales. Sacamos provecho del conocimiento de una ley al obtener una pléyade de conocimientos particulares mediante inferencias de lo general a lo particular, para lo que, naturalmente, se requiere siempre un trabajo mental /: el de la inferencia. Aquel que sabe cómo ocurre tal inferencia, ha captado también qué es generalidad tal como se intenta que se entienda aquí el significado de la palabra. Mediante inferencias de otro género podemos derivar nuevas leyes de las ya conocidas.

Ahora bien, ¿cuál es la esencia de la generalidad? Puesto que aquí nos las habemos con leyes y las leyes son pensamientos, de lo único que se puede tratar aquí es de la generalidad de los pensamientos. Toda ciencia procede aceptando como verdaderos una serie de pensamientos; pero los pensamientos escasamente son objetos de consideración, aquello de lo que se enuncia algo; como tales aparecen, en la mayor
279 parte de los casos, / las cosas que son objeto de percepción sensible. Al enunciar algo de ellas, damos expresión a pensamientos. Así aparecen habitualmente los pensamientos en la ciencia. Al predicar aquí generalidad de los pensamientos, los convertimos en objetos de consideración, y pasan con ello al lugar en el que suelen estar las cosas que son objeto de percepción sensible. Éstas que, por otra parte, son objetos de investigación, especialmente en las ciencias de la naturaleza, se distinguen fundamentalmente de los pensamientos, pues los pensamientos no son sensorialmente perceptibles. Ciertamente, los signos que expresan pensamientos pueden ser audibles o visibles, pero no los pensamientos mismos. Las impresiones de los sentidos pueden llevarnos a aceptar la verdad de un pensamiento; pero podemos también captar pensamientos sin aceptarlos como verdaderos. También los pensamientos falsos son pensamientos.

Si un pensamiento no es sensiblemente perceptible, no ha de esperarse que su generalidad lo sea. No estoy en posi-

ción de poder presentar un pensamiento como un mineralogista muestra un mineral llamando la atención sobre su peculiar brillo. Determinar la generalidad mediante una definición podría ser imposible.

El lenguaje parece poder ofrecer una salida; pues, por un lado, sus oraciones son sensiblemente perceptibles y, por otro, expresan pensamientos. Como medio de expresión de pensamientos, el lenguaje tiene que parecerse al pensamiento. De este modo, podemos esperar que pueda usarse como puente entre lo sensible y lo no sensible. Una vez que conozcamos lo lingüístico nos podrá resultar más fácil extender lo que hemos entendido a lo concerniente al pensamiento, a lo que tiene su reflejo en el lenguaje. No se trata aquí de la comprensión habitual del lenguaje, de la captación de los pensamientos expresados en él, sino de darse cuenta de una propiedad de los pensamientos que llamo generalidad lógica. Desde luego, ha de contarse aquí con la complicidad de los demás, y esta esperanza puede ser frustrante. El uso del lenguaje exige también precaución. No hemos de pasar por alto el profundo abismo que separa lo lingüístico y lo concerniente al pensamiento, y mediante ello se establecen ciertas restricciones a la correspondencia mutua en ambas regiones.

Ahora bien, ¿de qué forma aparece la generalidad en el lenguaje? Tenemos distintas expresiones para el mismo pensamiento general:

«Todos los hombres son mortales»,
«Cada hombre es mortal»,
«Si algo es un hombre, entonces eso es mortal».

Las diferencias en la expresión no afectan al pensamiento mismo. Es aconsejable no utilizar sólo un único modo de expresión, de modo que diferencias secundarias, por ejemplo en la coloración del pensamiento, no aparezcan como diferencias entre pensamientos. Las expresiones como «todo» y «cada» no son apropiadas para ser usadas en cualquier situación en la que está presente la generalidad, puesto que no toda ley se deja acuñar en esa forma. En el último modo de expresión tenemos la forma de la oración compuesta hipoté-

280 tica, apenas inevitable, / y las partes de la oración que indican de manera indeterminada «algo», «eso»; en éstas se encuentra propiamente la expresión de la generalidad. A partir de este modo de expresión podemos fácilmente realizar la transición hacia lo particular, reemplazando las partes de la oración que indican de manera indeterminada por la que designa de modo determinado:

«Si Napoleón es un hombre, entonces Napoleón es mortal».

Dada esta posibilidad de transición de lo general a lo particular, sólo nos resultan utilizables las expresiones de generalidad con partes de oraciones que indican de manera indeterminada; pero si nos limitásemos a «algo» y «eso», podríamos tratar sólo casos muy simples. Ahora bien, resulta natural adoptar el modo de la aritmética, en el que elegimos letras como partes de oraciones que indican de manera indeterminada:

«Si *a* es un hombre, entonces *a* es mortal».

Las letras con idéntica forma señalan unas a otras. En lugar de letras con forma idéntica a «*a*» podríamos igualmente bien tomarlas con forma idéntica a «*b*» o «*c*». Pero es esencial que tengan forma idéntica. Pero, en rigor, cruzamos aquí los límites del lenguaje hablado, diseñado para ser oído y nos adentramos en la región del lenguaje escrito o impreso, diseñado para el ojo. Una oración que escribe un escritor es, ante todo, una instrucción para formar una oración hablada en un lenguaje, cuyas secuencias de sonidos sirven para expresar un sentido. De este modo surge primariamente sólo una conexión mediadora entre signos escritos y un sentido expresado. Pero, una vez que se ha establecido esta conexión, se puede ver también la oración escrita o impresa como expresión inmediata de un pensamiento; por consiguiente, como una oración en el propio sentido de la palabra. De este modo, se obtiene un lenguaje dependiente del sentido de la vista, que puede aprender también, en caso de necesidad, un sordo. Las letras individuales pueden tomarse en él como partes de la oración que indican de manera inde-

terminada. El lenguaje descrito de este modo, al que llamaré lenguaje objeto [*Hilfssprache*][b], ha de servirnos como puente entre lo sensorial y lo no sensorial. Contiene dos *partes constituyentes* diferentes: *las formas de palabras* y *las letras* individuales. Éstas corresponden a palabras del lenguaje hablado, aquéllas habrán de indicar de manera indeterminada. Este lenguaje objeto ha de distinguirse de aquel en el que se produce el curso de mis pensamientos. Éste es el castellano[c] escrito o impreso usual, mi metalenguaje [*Darlegungssprache*].

En cambio, las oraciones del lenguaje objeto son los objetos de los cuales se habla en mi metalenguaje. Por ello, tengo que poderlos designar en mi metalenguaje, lo mismo que en un manual de astronomía los planetas se designan con sus nombres propios «Venus», «Marte». *Como nombres*
281 *propios / de las oraciones del lenguaje objeto utilizo estas mismas oraciones, si bien encerradas entre comillas.* De aquí se sigue que las oraciones del lenguaje objeto no están jamás investidas de fuerza asertórica. «Si *a* es un hombre, entonces *a* es mortal», es una oración del lenguaje objeto en el que se expresa un pensamiento general. Pasamos de lo general a lo particular al substituir por nombres de idéntica forma las letras de idéntica forma que indican de manera indeterminada. Reside en la esencia de nuestro lenguaje objeto el que nombres propios de idéntica forma designen el mismo objeto (hombre). Los signos vacíos (nombres) no son aquí nombres propios[1]. Al substituir las letras de forma idéntica a «*a*» que indican de manera indeterminada por nombres propios, que tienen forma idéntica a «Napoleón», obtenemos

[b] Como han señalado los editores del *Nachlass*, el par «*Hilfs-*» y «*Darlegungssprache*» parecen ser un antecedente claro de la distinción introducida por Tarski entre «lenguaje objeto» y «metalenguaje». Por esta razón he utilizado esta terminología en la traducción castellana.

[c] *Deutsch* en el original.

[1] Digo que los nombres propios de nuestro lenguaje objeto tiene *forma idéntica* si son de idéntica forma e igual tamaño de acuerdo con la intención del escritor, siempre que esa intención sea reconocible, aun cuando, en rigor, no se alcance totalmente.

«Si Napoleón es un hombre, entonces Napoleón es mortal».

Esta oración no ha de considerarse como conclusión, puesto que la oración «Si *a* es un hombre, entonces *a* es mortal» no está investida de fuerza asertórica, pues el pensamiento expresado aquí por ella no se presenta en calidad de aceptado como verdadero; *sólo un pensamiento aceptado como verdadero puede hacer de premisa de una inferencia.* Se puede, sin embargo, realizar una inferencia a partir de esto si se libera de las comillas a ambas oraciones de nuestro lenguaje objeto, con lo que resulta posible proponerlas con fuerza asertórica.

La oración compuesta «*Si Napoleón un hombre es, es Napoleón mortal*»[d] expresa una composición hipotética de pensamientos, que consta de un antecedente y un consecuente. Aquél se expresa en la oración «*Napoleón es un hombre*» y éste en la oración «*Napoleón es mortal*». Sin embargo, en nuestra oración compuesta no se contiene, en rigor, ni una oración de la misma forma que «*Napoleón es un hombre*» ni una de la misma forma que «*Napoleón es mortal*». En esta discrepancia de lo lingüístico con lo concerniente al pensamiento se manifiesta un defecto en nuestro lenguaje al que ha de ponerse remedio. Ahora bien, quiero vestir a los pensamientos que he expresado más arriba con la oración compuesta «*Si Napoleón es un hombre, entonces es Napoleón mortal*», con el ropaje de la oración «*Si Napoleón es un hombre, entonces Napoleón es mortal*», a la que quiero llamar, en lo que sigue, la segunda oración. Se ha de proceder de la misma manera en casos similares. De este modo,

[d] En alemán, a diferencia del castellano o del inglés, cuando dos oraciones se unen para formar una oración hipótetica, el orden de las palabras se altera. Si tenemos las oraciones «Napoleón es un hombre» [*Napoleon ist ein Mensch*] y «Napoleón es mortal» [*Napoleon ist sterblich*], su composición hipotética sería «Si Napoleón un hombre es, entonces es Napoleón mortal» [*Wenn Napoleon ein Mensch ist, ist Napoleon sterblich*]. Dado que Frege trata aquí de las discrepancias entre el alemán y un lenguaje que expresase más adecuadamente el pensamiento, he traducido aquí, contrariamente al criterio seguido a lo largo del artículo, la oración alemana «*Wenn Napoleon ein Mensch ist, ist Napoleon sterblich*» por una forma que suena un tanto forzada en castellano pero que resulta más fiel a la idea que Frege quiere expresar.

transformaré también la oración «*Si* a *un hombre es, es* a *mortal*» en «*Si* a *es un hombre, entonces* a *es mortal*», a la que llamaré, en lo que sigue, la primera oración[2]. En la primera oración distingo las dos letras individuales con la forma idéntica a «*a*» de la parte restante.

[2] La segunda oración no expresa, como la primera, una composición de pensamientos, puesto que ni «a *es un hombre*» ni «a *es mortal*» expresan un pensamiento. En rigor, aquí sólo tenemos partes de una oración, no oraciones.

COLECCIÓN FILOSOFÍA Y ENSAYO
Dirigida por Manuel Garrido

Agazzi, E.: *El bien, el mal y la ciencia.* Las dimensiones éticas de la empresa científico-tecnológica.
Austin, J. L.: *Sentido y percepción.*
Bechtel, W.: *Filosofía de la mente.* Una panorámica para la ciencia cognitiva.
Boden, M. A.: *Inteligencia artificial y hombre natural.*
Bottomore, T.; Harris, L.; Kiernan, V. G.; Miliband, R.; con la colaboración de Kolakowski, L.: *Diccionario del pensamiento marxista.*
Brown, H. I.: *La nueva filosofía de la ciencia* (3.ª ed.).
Bunge, M.: *El problema mente-cerebro.* Un enfoque psicobiológico (2.ª ed.).
Collier, G.; Minton, H. L., y Reynolds, G.: *Escenarios y tendencias de la psicología social.*
Cruz, M. (ed.), y otros: *Individuo, modernidad, historia.*
Chisholm, R. M.: *Teoría del conocimiento.*
Dampier, W. C.: *Historia de la ciencia y sus relaciones con la filosofía y la religión* (3.ª ed.).
Dancy, J.: *Introducción a la epistemología contemporánea.*
Díaz, E.: *Revisión de Unamuno.* Análisis crítico de su pensamiento político.
D'Ors, E.: *El secreto de la filosofía.* Doce lecciones, tres diálogos y, en apéndice, «La filosofía en quinientas palabras».
Eccles, J. C.: *La psique humana.*
Edelman, B.: *La práctica ideológica del Derecho.* Elementos para una teoría marxista del Derecho.
Fann, K. T.: *El concepto de filosofía en Wittgenstein* (2.ª ed.).
Fernandez, D.: *El rapto de Ganimedes.*
Ferrater Mora, J., y otros: *Filosofía y ciencia en el pensamiento español contemporáneo (1960-1970).*
Feyerabend, P.: *Tratado contra el método* Esquema de una teoría anarquista del conocimiento (3.ª ed.).
Fodor, J. A.: *Psicosemántica.* El problema del significado en la filosofía de la mente.
Frege, G.: *Ensayos de semántica y filosofía de la lógica.*
García-Baró, M.: *Categorías, intencionalidad y números.* Introducción a la filosofía primera y a los orígenes del pensamiento fenomenológico.
García Suárez, A.: *Modos de significar.* Una introducción temática a la filosofía del lenguaje.
García Suárez, A.: *La lógica de la experiencia.*
García Trevijano, C.: *El arte de la lógica.*
Garrido, M.: *Lógica simbólica* (3.ª ed.).
Gómez García, P.: *La antropología estructural de Claude Lévi-Strauss.*
Haack, S.: *Evidencia e investigación.* Hacia la reconstrucción en epistemología.
Habermas, J.: *La lógica de las ciencias sociales.* Estudios de filosofía social (2.ª ed.).
Habermas, J.: *Teoría y praxis.* Estudios de filosofía social (2.ª ed.).
Hernández Pacheco, J.: *Corrientes actuales de filosofía.* La Escuela de Francfort. La filosofía hermenéutica.
Hernández Pacheco, J.: *Corrientes actuales de filosofía (II).* Filosofía social.
Hierro, J. S.-P.: *Problemas del análisis del lenguaje moral.*

Hintikka, J.: *Lógica, juegos de lenguaje e información.* Temas kantianos de filosofía de la lógica.
Huisman, D.: *Diccionario de las mil obras clave del pensamiento.*
Jaspers, K.: *Los grandes filósofos.* Vol. I: Los hombres decisivos (Sócrates, Buda, Confucio, Jesús). Vol. II: Los fundadores del filosofar (Platón, Agustín y Kant).
Lao-tse: *Tao Te Ching.*
Lakatos, I., y otros: *Historia de la ciencia y sus reconstrucciones racionales* (3.ª ed.).
Lindsay, P. H., y Norman, D. A.: *Introducción a la psicología cognitiva* (2.ª ed.).
Lorenzo, J. de: *El método axiomático y sus creencias.*
Lorenzo, J. de: *Introducción al estilo matemático.*
Mackie, J. L.: *El milagro del teísmo.*
Mates, B.: *Lógica matemática elemental.*
McCarthy, Th.: *Ideales e ilusiones.* Reconstrucción y deconstrucción en la teoría crítica contemporánea.
McCarthy, Th.: *La teoría crítica de Jürgen Habermas* (3.ª ed.).
McCorduck, P.: *Máquinas que piensan.* Una incursión personal en la historia y las perspectivas de la inteligencia artificial.
Millar, D., y otros: *Diccionario básico de científicos.*
Morin, E.: *Sociología.*
Nagel, E.; Newman, J. R.: *El teorema de Gödel* (2.ª ed.).
Norris, C.: *¿Qué le ocurre a la postmodernidad?* La teoría crítica y los límites de la Filosofía.
Popper, K. R.: *Búsqueda sin término.* Una autobiografía intelectual (3.ª ed.).
Popper, K. R.: *Realismo y el objetivo de la ciencia.* Post Scriptum a *La lógica de la investigación científica,* vol. I.
Popper, K. R.: *El universo abierto.* Un argumento a favor del indeterminismo. Post Scriptum a *La lógica de la investigación científica,* vol. II.
Popper, K. R.: *Teoría cuántica y el cisma en física.* Post Scriptum a *La lógica de la investigación científica,* vol. III (2.ª ed.).
Putnam, H.: *Razón, verdad e historia.*
Quine, W. V.: *La relatividad ontológica y otros ensayos.*
Reguera, I.: *El feliz absurdo de la ética.* El Wittgenstein místico.
Rescher, N.: *La primacía de la práctica.*
Rescher, N.: *La racionalidad.* Una indagación filosófica sobre la naturaleza y la justificación de la razón.
Rescher, N.: *Los límites de la ciencia.*
Rivadulla, S.: *Filosofía actual de la ciencia.*
Robinet, A.: *Mitología, filosofía y cibernética.* El autómata y el pensamiento.
Rodríguez Magda, R. M.ª: *El modelo frankenstein.* De la diferencia a la cultura post.
Rodríguez Paniagua, J. M.: *¿Derecho natural o axiología jurídica?*
Rorty, R.: *Consecuencias del pragmatismo.*
Sahakian, W. S.: *Historia y sistemas de la psicología.*
San Román, T.: *Los muros de la separación.* Ensayo sobre alterofobia y filantropía.
Santayana, G.: *Tres poetas filósofos.* Lucrecio, Dante, Goethe.
Santayana, J.: *Diálogos en el limbo.*
Searle, J. R.: *Intencionalidad.* Un ensayo en la filosofía de la mente.

Smart, J. J. C.: *Nuestro lugar en el universo.* Un enfoque metafísico (2.ª ed.).
Störig, H. J.: *Historia universal de la filosofía.*
Stove, D. C.: *Popper y después.* Cuatro irracionalistas contemporáneos.
Strawson, P. F.: *Ensayos lógico-lingüísticos.*
Suzuki, D., y Knudtson, P.: *GenÉtica.* Conflicto entre la ingeniería genética y los valores humanos.
Trevijano Etcheverría, M.: *En torno a la ciencia.*
Valdés Villanueva, L. M. (ed.): *La búsqueda del significado.* Lecturas de filosofía del lenguaje (2.ª ed.).
Vargas Machuca, R.: *El poder moral de la razón.* La filosofía de Gramsci.
Veldman, D. J.: *Programación de computadoras en ciencias de la conducta.*
Villacañas, J. L.: *Racionalidad crítica.* Introducción a la filosofía de Kant.
Wellman, C.: *Morales y éticas.*

Gottlob Frege solía comparar la actividad del matemático con la de un explorador que descubre nuevos continentes. Y de hecho es verdad, como se ha sugerido, que su propia actividad como pensador se asemeja bastante a la peripecia vital de Cristóbal Colón. Del mismo modo que éste no logró descubrir una ruta hacia las Indias navegando hacia el Oeste, pero se topó en el camino con un nuevo continente, Frege no tuvo éxito en su tarea de reducir la matemática a la lógica, pero en sus esfuerzos por conseguir su meta dio lugar a cambios espectaculares en lógica —sólo comparables a los efectuados por Aristóteles— y fijó la agenda de los temas de debate de una importante porción de la filosofía y la semántica del siglo XX.

La presente antología recoge sus ensayos más significativos sobre semántica y filosofía de la lógica, entre los que merecen citarse «Función y concepto», «Sobre sentido y referencia», «Sobre concepto y objeto», «¿Qué es una función?», «El pensamiento» y «La negación». Asimismo, se incluye parte de la correspondencia que Frege mantuvo con Husserl sobre problemas de filosofía de la matemática y del lenguaje, así como la demoledora recensión —responsable quizás de la transformación de Husserl en acerado crítico del psicologismo— del primer volumen de la obra del padre de la fenomenología *Filosofía de la aritmética*.

El libro se completa con una visión panorámica del pensamiento de Frege. La selección, introducción y traducción de los textos ha sido realizada por Luis M. Valdés Villanueva, catedrático de Lógica y Filosofía de la Ciencia de la Universidad de Oviedo.

Filosofía y Ensayo





1217176